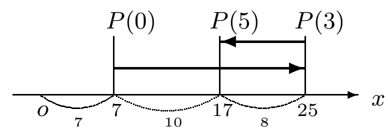
積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　解答例 ($No.9$)

1. 直線上を動く動点 P の時刻 t における速度が $v(t) = 12 - 4t$ とするとき、次の各問いに答えよ。ただし、点 P の $t = 0$ のときの座標を 7 とする。



(1) $t = 5$ における動点 P の座標を求めよ。

（解）時刻 t の座標を $x(t)$ とすると

$$x(5) = x(0) + \int_0^5 v(t)dt = 7 + \int_0^5 (12 - 4t)dt = 7 + \Big[12t - 2t^2\Big]_0^5$$

$$= 7 + \left\{(12 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2) - (0 - 0)\right\} = 7 + 60 - 50 = 17 \quad〃$$

(2) $t = 0$ から $t = 5$ までに点 P が実際に動いた道のり（移動した距離）を求めよ。

（解）$0 \leqq t \leqq 3$ のとき　$v(t) = 12 - 4t \geqq 0$ より　$|12 - 4t| = 12 - 4t$

$3 \leqq t \leqq 5$ のとき　$v(t) = 12 - 4t \leqq 0$ より　$|12 - 4t| = -(12 - 4t)$

$$S = \int_0^5 |v(t)|dt = \int_0^5 |12 - 4t|dt = \int_0^3 |12 - 4t|dt + \int_3^5 |12 - 4t|dt$$

$$= \int_0^3 (12 - 4t)dt + \int_3^5 (-12 + 4t)dt = \Big[12t - 2t^2\Big]_0^3 + \Big[-12t + 2t^2\Big]_3^5$$

$$= (36 - 18) - (0 - 0) + (-60 + 50) - (-36 + 18) = 26 \quad〃$$

2. 初速度 $40\,(m/s)$ の動点 p の t 秒後の加速度が $\alpha(t) = -10\,(m/s^2)$ であるという。点 P が再び出発点に戻るのは何秒後か。

（解）t 秒後の動点 P の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \alpha(t)dt = 40 + \int_0^t (-10)dt = 40 + \Big[-10t\Big]_0^t = 40 + \{(-10t) - 0\} = 40 - 10t$$

t 秒後の動点 P の位置を $x(t)$ とすると

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt = x(0) + \int_0^t (40 - 10t)dt = x(0) + \Big[40t - 5t^2\Big]_0^t = x(0) + 40t - 5t^2$$

t 秒後にもとに戻ったとすると　$x(t) = x(0)$ であるから $40t - 5t^2 = 0$　$\therefore 5t(t - 8) = 0$

$t > 0$ より　$t = 8$　よって、8 秒後にもとに戻る。　(答) 8 秒後

3. ある種の細菌を培養すると、その増加率は現在の数に比例する。２時間後には１万個、５時間後には８万個だったとするとき、次の各問いに答えよ。

(1) t 時間後の細菌の数を $N(t)$ とし、比例定数を k とするとき、$N(t)$ を表す式を求めよ。

（解）細菌の増加率は $\dfrac{d}{dt}N(t)$

$$\therefore \frac{dN}{dt} = kN$$

これを変数分離法で解くと

$$\frac{1}{N}dN = kdt$$

$$\int \frac{1}{N}dN = \int kdt \quad ↗$$

$$↗ \quad \log|N| = kt + c$$

$$|N| = e^{kt+c}$$

$$N = \pm e^{kt+c}$$

$$N = \pm e^c \cdot e^{kt}$$

$\pm e^c = A$ とおくと　↗

$$↗ \quad N = Ae^{kt}$$

$$\therefore N(t) = Ae^{kt}$$

$t = 0$　とおくと

$$N(0) = Ae^0 = A \cdot 1 = A$$

$$\therefore N(t) = N(0) \cdot e^{kt} \quad〃$$

(2) 最初にいた細菌の個数を求めよ。

（解）(1) の結果から $N(t) = N(0) \cdot e^{kt} \cdots ①$

$t = 2, N(2) = 10000$ を①に代入して

$$10000 = N(0) \cdot e^{2k} \cdots\cdots ②$$

$t = 5, N(5) = 80000$ を①に代入して

$$80000 = N(0) \cdot e^{5k} \cdots\cdots ③$$

②, ③ より　$N(0)\,e^{5k} = 8 \cdot N(0)\,e^{2k}$　↗

↗ $N(0) \neq 0$ より　$\therefore \dfrac{e^{5k}}{e^{2k}} = 8$

$e^{3k} = 8$　$\therefore (e^k)^3 = 2^3$　$\therefore e^k = 2$

$$\therefore e^{2k} = (e^k)^2 = 2^2 = 4$$

これを②に代入して

$$10000 = N(0) \cdot 4$$

$$\therefore N(0) = \frac{10000}{4} \quad \therefore N(0) = 2500 \quad〃$$