定数係数非斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$ (a, b は定数)

例２　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=x+1$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=x^2-3x$

> a, b を実数定数とする非斉次微分方程式
> $y''+ay'+by=R(x)\cdots$①
> に対して、斉次微分方程式
> $y''+ay'+by=0\cdots$②
> を考えると、①の一般解は①の１つの解と②の一般解との和で表される。

(解)

(1)　非斉次微分方程式

$y''-y'-2y=x+1\quad\cdots$①

に対し、斉次微分方程式

$y''-y'-2y=0\quad\cdots$②

を考えると、②の特性方程式は

$\lambda^2-\lambda-2=0$

$(\lambda+1)(\lambda-2)=0$

$\therefore \lambda=-1\,,\ \lambda=2$

ゆえに②の一般解は

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\ (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

である。次にこれと①の右辺から

①の特殊解の１つを

$y=px+q$ と予想すると

$y'=p\quad,\qquad y''=0$

これらを①に代入して

$0-p-2(px+q)=x+1$

$-2px-(p+2q)=x+1$

$$\begin{cases} -2p=1 \\ -(p+2q)=1 \end{cases}$$

これを解いて、$p=-\dfrac{1}{2}\,,\ q=-\dfrac{1}{4}$

よって、①の１つの解は　$y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$

ゆえに求める一般解は

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\quad〃$$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　非斉次微分方程式

$y''-4y'+4y=x^2-3x\quad\cdots$③

に対し、斉次微分方程式

$y''-4y'+4y=0\quad\cdots$④

を考えると、④の特性方程式は

$\lambda^2-4\lambda+4=0$

$(\lambda-2)^2=0$

$\therefore \lambda=2$ （重解）

ゆえに④の一般解は

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}\ (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

である。次にこれと③の右辺から

③の特殊解の１つを

$y=px^2+qx+r$ と予想すると

$y'=2px+q\quad,\qquad y''=2p$

これらを③に代入して

$2p-4(2px+q)+4(px^2+qx+r)=x^2-3x$

$4px^2-4(2p-q)x+2(p-2q+2r)=x^2-3x$

$$\begin{cases} 4p=1 \\ 4(2p-q)=3 \\ p-2q+2r=0 \end{cases}$$

これを解いて、

$$p=\frac{1}{4}\,,\ q=-\frac{1}{4}\,,\ r=-\frac{3}{8}$$

よって、①の１つの解は

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}$$

$$y=\frac{1}{8}(2x^2-2x-3)$$

である。ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{1}{8}(2x^2-2x-3)+(C_1+C_2x)e^{2x}\quad〃$$

(C_1, C_2 は任意定数)