定数係数非斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$ (a, b は定数)

例 5　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+2y=xe^{-2x}$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=x^2e^{3x}$

(解)

(1)　非斉次微分方程式

$y''+2y'+2y=xe^{-2x}$　$\cdots$①

に対し、斉次微分方程式

$y''+2y'+2y=0$　$\cdots$②

を考えると、②の特性方程式は

$\lambda^2+2\lambda+2=0$

$\therefore \lambda=-1\pm i$

ゆえに②の一般解は

$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

(C_1, C_2 は任意定数)

である。次にこれと①の右辺から

①の特殊解の１つを

$y=(px+q)e^{-2x}$ と予想すると

$y'=pe^{-2x}+(px+q)\cdot(-2e^{-2x})$

$=(-2px+p-2q)e^{-2x}$

$y''=-2pe^{-2x}+(-2px+p-2q)\cdot(-2e^{-2x})$

$=4(px-p+q)e^{-2x}$

これらを①に代入して

$4(px-p+q)e^{-2x}+2(-2px+p-2q)e^{-2x}$

$+2(px+q)e^{-2x}=xe^{-2x}$

$\{2px-2(p-q)\}e^{-2x}=xe^{-2x}$

$$\begin{cases} 2p=1 \\ p-q=0 \end{cases}$$

これを解いて、$p=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$

よって、①の１つの解は

$$y=\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}$$

ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}+e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x) \text{〃}$$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　非斉次微分方程式

$y''-2y'+y=x^2e^{3x}$　$\cdots$③

に対し、斉次微分方程式

$y''-2y'+y=0$　$\cdots$④

を考えると、④の特性方程式は

$\lambda^2-2\lambda+1=0$　　$(\lambda-1)^2=0$

$\therefore \lambda=1$ （重解）

ゆえに④の一般解は

$y=(C_1+C_2x)e^x$ (C_1, C_2は任意定数)

である。次にこれと③の右辺から

③の特殊解の１つを

$y=(px^2+qx+r)e^{3x}$ と予想すると

$y'=(2px+q)e^{3x}+(px^2+qx+r)\cdot 3e^{3x}$

$=\{3px^2+(2p+3q)x+3r\}e^{3x}$

$y''=(6px+2q+3r)e^{3x}+\{3px^2+(2p+3q)x+3r\}\cdot 3e^{3x}$

$=\{9px^2+3(4p+3q)x+(2p+3q+9r)\}e^{3x}$

これらを③に代入して

$\{9px^2+3(4p+3q)x+(2p+3q+9r)\}e^{3x}$

$-2\{3px^2+(2p+3q)x+3r\}e^{3x}$

$+(px^2+qx+r)e^{3x}=x^2e^{3x}$

$\therefore \{4px^2+4(2p+q)x+2(p-2q+2r)\}e^{3x}=x^2e^{3x}$

$$\begin{cases} 4p=1 \\ 2p+q=0 \\ p+2q+2r=0 \end{cases}$$

これを解いて、$p=\frac{1}{4}$，$q=-\frac{1}{2}$，$r=\frac{3}{8}$

よって、③の１つの解は

$$y=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}\right)e^{3x}$$

である。ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{1}{8}(2x^2-4x+3)e^{3x}+(C_1+C_2x)e^x \quad \text{〃}$$

(C_1, C_2 は任意定数)