定数係数非斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$ (a, b は定数)

例 7　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=x\cos 2x$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=x\sin x$

(解)

(1)　非斉次微分方程式

$y''+9y=x\cos 2x \quad \cdots ①$

に対し、斉次微分方程式

$y''+9y=0 \quad \cdots ②$

を考えると、②の特性方程式は

$\lambda^2+9=0 \qquad \therefore \lambda=\pm 3i$

ゆえに②の一般解は

$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ (C_1, C_2 は任意定数)

である。次にこれと①の右辺から

①の特殊解の１つを

$y=(ax+b)(p\sin 2x+q\cos 2x)$ と予想すると

$y'=a(p\sin 2x+q\cos 2x)+2(ax+b)(p\cos 2x-q\sin 2x)$

$y''=2a(p\cos 2x-q\sin 2x)+2a(p\cos 2x-q\sin 2x)$

$\quad +2(ax+b)(-2p\sin 2x-2q\cos 2x)$

$\quad =-4(ax+b)(p\sin 2x+q\cos 2x)$

$\quad +4a(p\cos 2x-q\sin 2x)$

これらを①に代入して

$-4(ax+b)(p\sin 2x+q\cos 2x)+4a(p\cos 2x-q\sin 2x)$

$\quad +9(ax+b)(p\sin 2x+q\cos 2x)=x\cos 2x$

$\therefore 5(ax+b)(p\sin 2x+q\cos 2x)$

$\quad +4a(p\cos 2x-q\sin 2x)=x\cos 2x$

$\therefore 5apx\sin 2x+5aqx\cos 2x+(-4aq+5bp)\sin 2x$

$\quad +(4ap+5bq)\cos 2x=x\cos 2x$

$$\begin{cases} 5ap=0 \\ 5aq=1 \\ -4aq+5bp=0 \\ 4ap+5bq=0 \end{cases}$$

これを解いて、$ap=0, aq=\frac{1}{5}, bp=\frac{4}{25}, bq=0$

よって、①の１つの解は

$$y=\frac{1}{5}x\cos 2x+\frac{4}{25}\sin 2x$$

ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{1}{5}\cos 2x+\frac{4}{25}\sin 2x+C_1\cos 3x+C_2\sin 3x \text{〃}$$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　非斉次微分方程式

$y''+y=x\sin x \quad \cdots ③$

に対し、斉次微分方程式

$y''+y=0 \quad \cdots ④$

を考えると、④の特性方程式は

$\lambda^2+1=0 \qquad \therefore \lambda=\pm i$

ゆえに④の一般解は

$y=C_1\cos x+C_2\sin x$　(C_1, C_2 は任意定数)

である。次にこれと③の右辺から

③の特殊解の１つを

$y=(ax^2+bx)(p\sin x+q\cos x)$ と予想すると

$y'=(2ax+b)(p\sin x+q\cos x)$

$\quad +(ax^2+bx)(p\cos x-q\sin x)$

$y''=2a(p\sin x+q\cos x)+2(2ax+b)(p\cos x-q\sin x)$

$\quad -(ax^2+bx)(p\sin x+q\cos x)$

これらを③に代入して

$2a(p\sin x+q\cos x)+2(2ax+b)(p\cos x-q\sin x)=x\sin x$

$\therefore -4aqx\sin x+4apx\cos x+2(ap-bq)\sin x$

$\quad +2(aq+bp)\cos x=x\sin x$

$$\begin{cases} -4aq=1 \\ 4ap=0 \\ ap-bq=0 \\ aq+bp=0 \end{cases}$$

これを解いて、$aq=-\frac{1}{4}, ap=0, bq=0, bp=\frac{1}{4}$

よって、③の１つの解は

$$y=-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x$$

である。ゆえに求める一般解は

$$y=-\frac{1}{4}x(x\cos x-\sin x)+C_1\cos x+C_2\sin x \text{〃}$$

(C_1, C_2 は任意定数)

≪注意≫

③の解の１つを $y=x(p\sin x+q\cos x)$

と予想すると

$2(p\cos x-q\sin x)=x\sin x$ となって不適。