連立微分方程式

例 12　次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{2t} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = \cos t \\ -x + \dfrac{dy}{dt} = -\sin t \end{cases}$

(解)

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + e^t & \cdots ① \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{2t} & \cdots ② \end{cases}$

②より　$x = \dfrac{dy}{dt} + 6y - e^{2t} \cdots ③$

$\therefore \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} - 2e^{2t}$

これらを①に代入して

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} - 2e^{2t} = -5\left(\frac{dy}{dt} + 6y - e^{2t}\right) + 2y + e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 28y = e^t + 7e^{2t} \cdots ④$$

この線形微分方程式の斉次微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 28y = 0 \cdots ⑤$$

である。この特性方程式は

$\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0$　$\therefore \lambda = -4$, $\lambda = -7$

よって、⑤の一般解は

$y = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t}$ (C_1, C_2は任意定数)

これと④の右辺から、④の特殊解の 1 つを $y = ae^t + be^{2t}$ と予想すると

$\dfrac{dy}{dt} = ae^t + 2be^{2t}$,　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = ae^t + 4be^{2t}$

これらを④に代入して

$(ae^t + 4be^{2t}) + 11(ae^t + 2be^{2t}) + 28(ae^t + be^{2t}) = e^t + 7e^{2t}$

$40ae^t + 54be^{2t} = e^t + 7e^{2t}$

$\begin{cases} 40a = 1 \\ 54b = 7 \end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases} a = \frac{1}{40} \\ b = \frac{7}{54} \end{cases}$

ゆえに④の 1 つの解は　$y = \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t}$

よって、④の一般解は

$$y = \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t} + C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{27}e^{2t} - 4C_1e^{-4t} - 7C_2e^{-7t}$$

これらを③に代入して

$x = \left(\frac{1}{40}e^t + \frac{7}{27}e^{2t} - 4C_1e^{-4t} - 7C_2e^{-7t}\right) + 6\left(\frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t} + C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t}\right) - e^{2t}$

ゆえに求める一般解は

$\begin{cases} x = \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{27}e^{2t} + 2C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} \\ y = \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t} + C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} \end{cases}$

(C_1, C_2 は任意定数)　〃

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = \cos t & \cdots ⑥ \\ -x + \dfrac{dy}{dt} = -\sin t & \cdots ⑦ \end{cases}$

⑦より　$x = \dfrac{dy}{dt} + \sin t \cdots ⑧$

$\therefore \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} + \cos t$

これと⑥から　$\dfrac{d^2y}{dt^2} + \cos t + 2y = \cos t$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0 \cdots ⑨$

この斉次微分方程式の特性方程式は

$\lambda^2 + 2 = 0$　$\therefore \lambda = \pm\sqrt{2}i$

よって、⑨の一般解は

$y = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t$ (C_1, C_2 は任意定数)

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2}C_1\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}C_2\cos\sqrt{2}t$$

これらを⑧に代入して

$$x = -\sqrt{2}C_1\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}C_2\cos\sqrt{2}t + \sin t$$

ゆえに求める一般解は

$\begin{cases} x = \sin t - \sqrt{2}(C_1\sin\sqrt{2}t - C_2\cos\sqrt{2}t) \\ y = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t \end{cases}$

(C_1, C_2 は任意定数)　〃