斉次微分方程式の１つの特殊解を知り得た場合

例 19　微分方程式 $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ の一般解を求めよ。

(解)

(1) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=0 \cdots ①$

この特殊解の１つを $y=x^\alpha$ と予想すると

$$\frac{dy}{dx}=\alpha x^{\alpha-1},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

これらを①に代入して

$(1+x^2)\{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\}-2x\alpha x^{\alpha-1}+2x^\alpha=0$

$(\alpha-1)\{\alpha x^{\alpha-2}+(\alpha-2)x^\alpha\}=0 \quad \therefore \alpha=1$

よって、$y=x$ は①の特殊解の１つである。

ゆえに、$y=cx$ (c は定数) も①の特殊解の１つであるから、u を x の関数として、定数変換法によって、$y=ux$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot x+u\cdot 1=x\frac{du}{dx}+u$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=1\cdot\frac{du}{dx}+x\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}$$

これらを①に代入して

$$(1+x^2)\left(x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\right)-2x\left(x\frac{du}{dx}+u\right)+2ux=0$$

$$\therefore x(1+x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}=0$$

$\dfrac{du}{dx}=p$　とおくと

$$x(1+x^2)\frac{dp}{dx}+2p=0$$

$$\int\frac{1}{p}dp=-2\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx\cdot ②$$

ここで　$I=2\displaystyle\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$　について

$x=\tan\theta$ とおくと、

$1+x^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta \quad \therefore dx=\sec^2\theta d\theta$

$$I=2\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta\sec^2\theta}=2\int\frac{1}{\tan\theta}d\theta$$

$$=2\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=2\log|\sin\theta|=\log\sin^2\theta$$

$$=\log(1-\cos^2\theta)=\log\left(1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$=\log\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)=\log\frac{x^2}{1+x^2}$$

であるから、②から

$$\log|p|=-\log\frac{x^2}{1+x^2}+c$$

$$\log\left|p\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right|=c \quad \therefore p\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)=\pm e^c$$

$\pm e^c=C_1$　とおくと

$$p=C_1\frac{1+x^2}{x^2} \quad \therefore \frac{du}{dx}=C_1(x^{-2}+1)$$

$$u=C_1\int(x^{-2}+1)dx=C_1\left(-\frac{1}{x}+x\right)+C_2$$

これを $y=ux$ に代入すると、求める一般解は

$$y=C_1(x^2-1)+C_2x \quad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$ 〃

≪公式≫

斉次微分方程式 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ の１つの解を y_1 とすると、一般解は

$$y=C_1y_1\int e^{-\int p(x)dx}y_1^{-2}dx+C_2x$$

(別解) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{-2x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{1+x^2}y=0$

この特殊解の１つが $y=x$ であるから

$$y=C_1x\int e^{-\int\frac{-2x}{1+x^2}dx}x^{-2}dx+C_2x$$

$$=C_1x\int e^{\log(1+x^2)}x^{-2}dx+C_2x$$

$$=C_1x\int(1+x^2)x^{-2}dx+C_2x$$

$$=C_1x\int(x^{-2}+1)dx+C_2x$$

$$=C_1x(-x^{-1}+x)+C_2x$$

$$\therefore y=C_1(x^2-1)+C_2x \quad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$ 〃

これが求める一般解である。