斉次微分方程式の１つの特殊解を知り得た場合

例 20　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x^2}y=3x^3+2$ の一般解を求めよ。

(解)

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x^2}y=3x^3+2\ \cdots$①

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x^2}y=0\ \cdots$②

②の特殊解の１つを $y=x^{\alpha}$ と予想すると

$$\frac{dy}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

これらを②に代入して

$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}-\frac{1}{x}\alpha x^{\alpha-1}+\frac{1}{x^2}x^{\alpha}=0$

$\therefore(\alpha-1)^2x^{\alpha-2}=0\quad\therefore\alpha=1$

よって、 $y=x$ は②の特殊解の１つである。

ゆえに、$y=cx$ (c は定数) も②の特殊解の１つであるから、u を x の関数として、定数変換法によって、$y=ux$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot x+u\cdot 1=x\frac{du}{dx}+u$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=1\cdot\frac{du}{dx}+x\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}$$

これらを①に代入して

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\left(x\frac{du}{dx}+u\right)+\frac{1}{x^2}ux=3x^3+2$$

$x\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{du}{dx}=3x^3+2\cdots$③

この斉次微分方程式は $x\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{du}{dx}=0\cdots$④

$\dfrac{du}{dx}=p$　とおくと　$x\dfrac{dp}{dx}+p=0$

$$\int\frac{1}{p}dp=-\int\frac{1}{x}dx\quad\therefore\log|p|=-\log|x|+c$$

$\therefore\log|px|=c\quad\therefore px=\pm e^c$

$\pm e^c=C_1$ とおくと

$$p=C_1\frac{1}{x}\quad\therefore\frac{du}{dx}=C_1\frac{1}{x}\quad\therefore u=\int C_1\frac{1}{x}dx$$

$\therefore u=C_1\log|x|+C_2\quad(C_1,C_2$は任意定数)

これが④の一般解である。

これと③の右辺から、③の特殊解の１つを

$u=ax^4+bx^3+cx^2+dx$ と予想すると

$$\frac{du}{dx}=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=12ax^2+6bx+2c$$

これらを③に代入して整理すると

$16ax^3+9bx^2+4cx+d=3x^3+2$

$\therefore a=\frac{3}{16}$; $b=0$,　$c=0$,　$d=2$

よって、③の１つの解は $u=\dfrac{3}{16}x^4+2x$ である。

したがって、③の一般解は

$$u=\frac{3}{16}x^4+2x+C_1\log|x|+C_2$$

これらを $y=ux$ に代入すると、求める一般解は

$$y=\frac{3}{16}x^5+2x^2+C_1x\log|x|+C_2x$$ 〃

(C_1,C_2 は任意定数)

(別解) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x^2}y=3x^3+2\cdots$①

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x^2}y=0\cdots$②

②の特殊解の１つが $y=x$ であるから

$$y=C_1x\int e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}x^{-2}dx+C_2x$$

$$=C_1x\int e^{\log x}x^{-2}dx+C_2x$$

$$=C_1x\int xx^{-2}dx+C_2x=C_1x\int\frac{1}{x}dx+C_2x$$

$y=C_1x\log x+C_2x\qquad(C_1,C_2$は任意定数)

これと①の右辺から①の特殊解の１つを

$y=px^5+qx^4+rx^3+sx^2$ と予想すると

$\frac{dy}{dx}=5px^4+4qx^3+3rx^2+2sx$

$\frac{d^2y}{dx^2}=20px^3+12qx^2+6rx+2s$

これらを①に代入して整理すると

$16x^3+9qx^2+4rx+s=3x^3+2$

$\therefore p=\frac{3}{16}$,　$q=0$,　$r=0$,　$s=2$

よって、①の特殊解の１つは $y=\frac{3}{16}x^5+2x^2$

ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{3}{16}x^5+2x^2+C_1x\log x+C_2x$$ 〃

(C_1,C_2 は任意定数)