2階線形微分方程式の独立変数を変換する方法

例 25　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+e^{-2x}y=0$　の一般解を求めよ。

≪理論≫

線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$$

において、独立変数 x を $t=\psi(x)$ に変換すれば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}$$

であるから、原微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\dfrac{d^2t}{dx^2}+P\dfrac{dt}{dx}}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{Q}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2}y=\frac{R}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2}$$

(i)　y の係数が定数 b に等しくなるように

$$\frac{Q}{\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2}=b \quad すなわち \quad \frac{dt}{dx}=\sqrt{\frac{Q}{b}}$$

となるように $t=\psi(x)$ を選んだ場合、

もし $\dfrac{dy}{dt}$ の係数も定数 a ならば原微分方程式は

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+a\dfrac{dy}{dt}+by=r(x)$ の形になって解ける。

(ii)　$\dfrac{dy}{dt}$ の係数が 0 になるようにすると

$$\frac{d^2t}{dx^2}+P\frac{dt}{dx}=0 \quad ここで \quad \frac{dt}{dx}=z \quad おくと$$

$$\frac{dz}{dx}=-P(x)z \quad \therefore\int\frac{1}{z}dz=-\int P(x)dx$$

$$\therefore\log z=-\int P(x)dx \quad \therefore z=e^{-\int P(x)dx}$$

$$\therefore\frac{dt}{dx}=e^{-\int P(x)dx} \quad \therefore t=\int e^{-\int P(x)dx}dx$$

となるように $t=\psi(x)$ を選んだ場合、

もし y の係数が定数 b ならば原微分方程式は

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+by=r(x)$ の形になって、解ける。

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)=R(x)$ において

$\dfrac{d^2t}{dx^2}+P(x)\dfrac{dt}{dx}=0$ になるように変換すると

$\dfrac{dt}{dx}=e^{-\int P(x)dx} \quad \therefore t=\displaystyle\int e^{-\int P(x)dx}dx$

(解)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+e^{-2x}y=0\cdots①$$

$\dfrac{d^2t}{dx^2}+\dfrac{dt}{dx}=0$ すなわち $\dfrac{dt}{dx}=e^{-\int 1dx}=e^{-x}$

$\therefore t=\displaystyle\int e^{-x}dx=-e^{-x}$　と変換すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(e^{-x})\frac{dy}{dt}+e^{-x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=-e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$=-e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-2x}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを①に代入して

$$-e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-2x}\frac{d^2y}{dt^2}+e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-2x}y=0$$

$$e^{-2x}\frac{d^2y}{dt^2}+e^{-2x}y=0$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dt^2}+y=0\cdots②$$

この特性方程式は　$\lambda^2+1=0$　$\therefore\lambda=\pm i$

よって、②の一般解は

$y=C_1\cos t+C_2\sin t$ (C_1,C_2は任意定数)

これに $t=-e^{-x}$ を代入して

$y=C_1\cos(-e^{-x})+C_2\sin(-e^{-x})$

よって、求める一般解は

$y=C_1\cos e^{-x}-C_2\sin e^{-x}$　〃

(C_1,C_2 は任意定数)