2 階線形微分方程式の独立変数を変換する方法

例 26　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}\tan x+4y\sec^2 x=0$　の一般解を求めよ。

≪参考≫

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)=R(x)$ において

$\dfrac{d^2t}{dx^2}+P(x)\dfrac{dt}{dx}=0$ になるように変換すると

$\dfrac{dt}{dx}=e^{-\int P(x)dx}\quad \therefore t=\displaystyle\int e^{-\int P(x)dx}dx$

(解)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\tan x+4y\sec^2 x=0\cdots①$$

$\dfrac{d^2t}{dx^2}+\dfrac{dt}{dx}\tan x=0$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=e^{-\int(-\tan x)dx}=e^{-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx}$$

$$=e^{-\log(\cos x)}=e^{\log\frac{1}{\cos x}}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore t=\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$\sin x=u$　とおくと

$$\frac{du}{dx}=\cos x\qquad du=\cos x dx$$

$$\therefore t=\int\frac{1}{1-u^2}du=\int\frac{1}{(1-u)(1+u)}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}(\log|1+u|-\log|1-u|)$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}=\log\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

よって、$t=\log\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$　と変換すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{\cos x})\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos^2 x}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを①に代入して

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos^2 x}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-\frac{1}{\cos x}\frac{dy}{dt}\tan x+4y\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

$$\therefore \frac{1}{\cos^2 x}\frac{d^2y}{dt^2}+4y\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dt^2}+4y=0\cdots②$$

この特性方程式は　$\lambda^2+4=0$　$\therefore\lambda=\pm 2i$

よって、②の一般解は

$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$ (C_1, C_2は任意定数)

これに $t=\log\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ を代入して

$$y=C_1\cos\left(2\log\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$$

$$+C_2\sin\left(2\log\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\quad〃$$

(C_1, C_2 は任意定数)

これが求める一般解である。