線形でない同次形微分方程式 $f(x,y,y'')=0$

$f(\rho x,\rho^m y,\rho^{m-1}y',\rho^{m-2}y'')=\rho^r f(x,y,y',y'')$ という斉次条件を満足するとき　$\Longrightarrow$　$x=e^t$, $y=ze^{mt}$ とおく

例 35　微分方程式 $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(y-x\dfrac{dy}{dt}\right)^2=0$ の一般解を求めよ。

≪確認≫

$x^3y''-(y-xy')^2=0$　において

$(\rho x)^3(\rho^{m-2}y'')-\{\rho^m y-(\rho x)(\rho^{m-1}y')\}^2=\rho^{m+1}x^3y''-\rho^{2m}(y-xy')^2$

$m+1=2m$　すなわち　$m=1$　のとき

$(\rho x)^3(\rho^{-1}y'')-\{\rho y-(\rho x)(\rho^0 y')\}^2=\rho^2\{x^3y''-(y-xy')^2\}$

がなり立つから、同次形である。よって、$x=e^t$, $y=ze^t$　とおけばよい。

(解)　$x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0\cdots①$

$x=e^t$　,　$y=ze^t$　とおくと

$$t=\log x \qquad \therefore \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=\frac{1}{e^t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(ze^t)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left(\frac{dz}{dt}\cdot e^t+z\cdot e^t\right)\frac{1}{e^t}=\frac{dz}{dt}+z$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dt}+z\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}+z\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\right)\frac{1}{e^t}$$

これらを①に代入して

$$(e^t)^3\cdot\frac{1}{e^t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\right)$$

$$-\left\{ze^t-e^t\left(\frac{dz}{dt}+z\right)\right\}^2=0$$

$$e^{2t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\right)-\left(-e^t\frac{dz}{dt}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{dz}{dt}=0$$

$\dfrac{dz}{dt}=p$　とおくと

$$\frac{dp}{dt}-p^2+p=0 \qquad \therefore\frac{dp}{dt}=p(p-1)$$

$$\therefore\frac{dt}{dp}=\frac{1}{p(p-1)}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}$$

$$t=\int\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=\log|p-1|-\log|p|+c$$

$$t=\log\left|\frac{p-1}{p}\right|+c \quad \therefore \log\left|\frac{p-1}{p}\right|=t-c$$

$$\left|\frac{p-1}{p}\right|=e^{t-c} \qquad \therefore \frac{p-1}{p}=\pm e^{-c}e^t$$

$\pm e^{-c}=C_1$　とおくと

$$\frac{p-1}{p}=C_1e^t \qquad \therefore 1-\frac{1}{p}=C_1e^t$$

$$\frac{1}{p}=1-C_1e^t \qquad \therefore p=\frac{1}{1-C_1e^t}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{1-C_1e^t} \qquad \therefore z=\int\frac{1}{1-C_1e^t}dt$$

$e^t=u$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=e^t$ $\therefore dt=\dfrac{1}{e^t}du=\dfrac{1}{u}du$

$$z=\int\frac{1}{1-C_1u}\cdot\frac{1}{u}du=\int\left(\frac{C_1}{1-C_1u}+\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\int\left(-\frac{-C_1}{1-C_1u}+\frac{1}{u}\right)du$$

$$=-\log|1-C_1u|+\log|u|+C_2$$

$$=\log\left|\frac{u}{1-C_1u}\right|+C_2=\log\left|\frac{e^t}{1-C_1e^t}\right|+C_2$$

これを $y=ze^t$ に代入すると

$$y=\left(\log\left|\frac{e^t}{1-C_1e^t}\right|+C_2\right)e^t$$

よって、求める一般解は

$$y=x\log\left|\frac{x}{1-C_1x}\right|+C_2x \quad〃$$

(C_1,C_2は任意定数)