

第 1 章 微分積分 I 《 § 1 微分 》

- 18 (1) $y = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) のグラフを描け.
 (2) 3^π と π^3 はどちらが大きいのか、理由を付けて答えよ.

(岡山大)

《 ポイント：定義域の端でのグラフの様子は、関数の極限值を用いて調べる. 》

《 ポイント：グラフを利用して、 3^π と π^3 を比較する. 》

(解)

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= \frac{(\log x)' \cdot x - (\log x) \cdot x'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

$y' = 0$ とおくと、 $\log x = 1 \quad x = e$

$x < e$ のとき、 $\log x < 1$ だから、 $y' > 0$

$x > e$ のとき、 $\log x > 1$ だから、 $y' < 0$

$x = e$ のとき、 $y = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$

よって、 $x > 0$ での増減表は次のようになる.

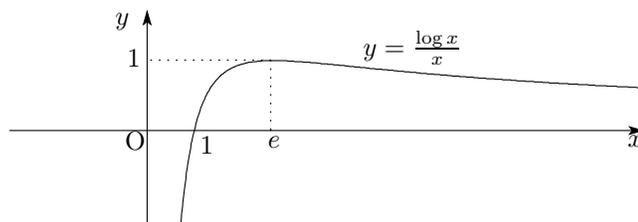
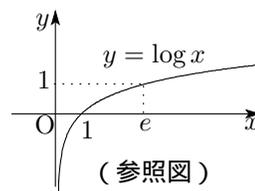
x	0	...	e	...
y'	/	+	0	-
y	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

ロピタルの定理より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

よって、グラフは右図のようになる.



- (2) $x > e$ のとき、グラフは単調減少である.

よって、 $e < 3 < \pi$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\log 3}{3} &> \frac{\log \pi}{\pi} \\ \pi \log 3 &> 3 \log \pi \end{aligned}$$

よって、 $\log 3^\pi > \log \pi^3$

関数 $y = \log x$ は単調増加だから、

$$3^\pi > \pi^3 \quad \text{”}$$

