第４章　応用数学《§1　ベクトル解析・ラプラス変換・フーリエ級数》

$\boxed{228}$ 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$　（ただし，ω は定数）を考える．

以下の問いに答えよ．

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．; C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\ell$ を計算せよ．

ただし，$d\ell$ は C に沿った微分線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\bigtriangledown\times\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸方向の単位ベクトル $(0,0,1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．

重積分 $\displaystyle\iint_D(\bigtriangledown\times\boldsymbol{A})\cdot e_z dxdy$ を計算せよ．

(三重大)

《　ポイント：外積の成分表示　》

$\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$ のとき，

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\qquad\text{（行列式は形式的表現）}$$

(解)

(1) $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ より，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&\omega\\x&y&z\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}0&\omega\\y&z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}0&\omega\\x&z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}0&0\\x&y\end{vmatrix}$$

$=-\omega y\cdot\boldsymbol{i}+\omega x\cdot\boldsymbol{j}+0\cdot\boldsymbol{k}=(-\omega y,\ \omega x,\ 0)$　〃

《ポイント》位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(t)$ である C 上で，C に沿うベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の線積分は，$\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$

(解)

(2) $C\ :\ \ell(t)=(R\cos t,\ R\sin t,\ 0)\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$ より，

C 上で，$\boldsymbol{A}=(-\omega y,\ \omega x,\ 0)=(-\omega R\sin t,\ \omega R\cos t,\ 0)$

$$\frac{d\ell}{dt}=(-R\sin t,\ R\cos t,\ 0)$$

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\omega R\sin t,\ \omega\cos t,\ 0)\cdot(-R\sin t,\ R\cos t,\ 0)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(\omega R^2\sin^2 t+\omega R^2\cos^2 t+0^2)dt=\omega R^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt$$

$$=\omega R^2\int_0^{2\pi}1\ dt=\omega R^2\Big[t\Big]_0^{2\pi}=\omega R^2\cdot 2\pi=2\pi\omega R^2 \quad 〃$$

《　ポイント：$\triangledown$ はハミルトンの演算子　》

$$\triangledown=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(i) $\triangledown$ と $\boldsymbol{a}$ の形式的な内積は;

$$\triangledown\cdot\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x,\ a_y,\ a_z)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

(ii) $\triangledown$ と $\boldsymbol{a}$ の形式的な外積は;

$$\triangledown\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\ -\frac{\partial a_z}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z},\ \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

(解)

(3) $\triangledown\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}$

$$=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \omega x & 0\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & 0\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ -\omega y & \omega x\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\omega x\right)-\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial z}(-\omega y)+\boldsymbol{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\omega x-\frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right\}$$

$$=0\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}+(\omega+\omega)\cdot\boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ 2\omega)\quad 〃$$

《　ポイント：1　》

D : $x^2+y^2 \leqq R^2$ より，$y^2 \leqq R^2-x^2$　$\therefore -\sqrt{R^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{R^2-x^2}$

$$\iint_D dxdy=\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dydx=4\cdot\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\ dydx$$

$$=4\cdot\int_0^R\Big[y\Big]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx=4\cdot\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\ dx=4\cdot\frac{\pi R^2}{4}=\pi R^2$$

《　ポイント：2　》

D : $x^2+y^2 \leqq R^2$ より，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\quad(0\leqq r\leqq R,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とおくと，

$$\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^R rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}d\theta=\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} 1\ d\theta$$

$$=\frac{R^2}{2}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}=\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi=\pi R^2$$

(解)

(4) (3) より，

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_z=(0,\ 0,\ 2\omega)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0\cdot0+0\cdot0+2\omega\cdot1=2\omega$$

$$\iint_D(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_z dxdy$$

$$=2\omega\iint_D dxdy=2\omega\cdot\pi R^2=2\pi\omega R^2\quad〃$$