

第4章 応用数学 《§1 ベクトル解析・ラプラス変換・フーリエ級数》

238 周期関数 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x < \pi$), $f(x+2\pi) = f(x)$ の $(-\pi, \pi)$ におけるフーリエ級数は,

次のようになる.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx$$

これを用いて, 次の公式を証明せよ.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi}{8}$$

(大分大)

《 ポイント：フーリエ級数の収束定理 》

$f(x)$ のフーリエ級数は, $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ に収束する.

特に連続点では関数 $f(x)$ の値と一致する.

(解)

$f(x)$ は $x = 0$ で連続であるから,

$f(0)$ はフーリエ級数の $x = 0$ での値と等しくなる.

$$\therefore f(0) = |0| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(n \cdot 0)$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cdot 1 = 0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

ここで, n が偶数のとき, $1 - (-1)^n = 0$

n が奇数のとき, $1 - (-1)^n = 2$ であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi}{8} \quad "$$

参考 周期関数 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x < \pi$), $f(x+2\pi) = f(x)$ の $(-\pi, \pi)$ におけるフーリエ級数に

展開せよ.

(解)

$f(x)$ は偶関数だから, $b_n = 0$ であり, フーリエ余弦級数を求めればよい.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[x \cdot \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left\{ \left[x \sin nx \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} [\cos nx]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n^2\pi} \{(-1)^n - 1\} = -\frac{2}{n^2\pi} \{1 - (-1)^n\}$$

よって, フーリエ級数展開は,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} \{1 - (-1)^n\} \cos nx$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx \quad "$$