

第4章 応用数学《§2 複素関数》

247 以下の問いに答えよ.

- (1)
- $z = x + yi$
- とするとき, 実数が
- $U(x, y) = x^2 - y^2$
- で与えられる正則関数
- $f(z)$
- の虚部を求めよ.

また, $f(z)$ を z の関数として表せ.

- (2) 次の定積分を求めよ,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 \cos \theta + 5} d\theta$$

(大阪府立大)

《 ポイント1: コーシー・リーマンの関係式 》

関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則であるための必要十分条件は, $u_x = v_y, u_y = -v_x$ このとき, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

(解)

- (1) 虚部を
- $v(x, y)$
- とおくと, コーシー・リーマンの関係式より,

$$v_y = u_x = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x$$

$$\text{よって, } v = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x) \cdots \textcircled{1}$$

$$v_x = -u_y = -\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -(-2y) = 2y$$

$$\text{よって, } v = \int 2y dx = 2xy + \varphi(y) \cdots \textcircled{2}$$

(ただし, $\varphi(x)$ は x の式, $\varphi(y)$ は y の式の式を表す.)①, ② を比較して, $\varphi(x) = \varphi(y) = C$ (定数)したがって, $v = 2xy + C$ と表せる.正則関数 $f(z)$ の虚部は,

$$v(x, y) = 2xy + C \quad (C \text{ は定数}) \quad "$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i(2xy + C) = x^2 + 2x \cdot (iy) + (iy)^2 + Ci$$

$$= (x + yi)^2 + Ci = z^2 + Ci$$

 $f(z)$ を z の関数として表すと.

$$f(z) = z^2 + A \quad (A \text{ は定数}) \quad "$$

《 ポイント 2 : オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 》

オイラーの公式から, 次の 2 式が得られる.

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

《 ポイント 3 : 留数定理 》

単純閉曲線 C の内部にある得意点を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を除き,

C の周および内部で $f(z)$ が正則ならば,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}[f, \alpha_1] + \operatorname{Res}[f, \alpha_2] + \dots + \operatorname{Res}[f, \alpha_n] \right)$$

《 ポイント 4 : $z = e^{i\theta}$ として, ポイント 2 を利用する. $z^{-1} = e^{-i\theta}$ に注意する. 》

(解)

(2) 曲線 $C : z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とおく, 積分路 C は単位円である.

$$z = e^{i\theta} \text{ だから, } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \quad \frac{1}{iz} dz = d\theta$$

よって,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 \cos \theta + 5} d\theta = \int_C \frac{1}{4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2} + 5} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz$$

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} \text{ とおく,}$$

分母を 0 とすると, $2z^2 + 5z + 2 = (z + 2)(2z + 1) = 0$ より,

$f(z)$ の孤立特異点は $-2, -\frac{1}{2}$ である.

よって, $f(z)$ の孤立特異点のうち単位円 C の内部にあるものは $-\frac{1}{2}$ である.

$$\operatorname{Res} \left[f, -\frac{1}{2} \right] = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left\{ z - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} f(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{(z + 2)(2z + 1)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2z + 1}{2} \cdot \frac{1}{(z + 2)(2z + 1)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2(z + 2)} = \frac{1}{2(-\frac{1}{2} + 2)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

よって, 留数定理より,

$$I = \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left[f, -\frac{1}{2} \right] = 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi$$