第 4 章 応用数学 《 § 2 複素関数 》

250 集合 $A = \{z \mid z \text{ は複素数, } |z| = 1, z \neq 1\}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) A に属する z に対して, $z = \frac{c+i}{c-i}$ を満たす実数 c が存在することを示せ.
- (2) 上の (1) で存在する c は一意的であることを示せ.
- (3) A に属する z は, $z = \frac{c+i}{c-i}$ によって, 一意的に定まる実数 c を対応させる写像 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ は全単射であることを示せ.

(富山大)

《 ポイント: $\bar{\bar{z}} = z, z\bar{z} = |z|^2, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \rangle$$

- (1) $z = \frac{c+i}{c-i}$ より, $(c-i)z = (c+i) \quad c(z-1) = (z+1)i$
 $z \neq 1$ より, $c = \frac{z+1}{z-1}i$

c が実数であることを示す. 《 ポイント: c が実数 $\iff \bar{c} = c$ 》

$$\bar{c} = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}i\right)} = \frac{\overline{z+1}}{\overline{z-1}}\bar{i} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}\bar{i} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}(-i)$$

ここで, $|z| = 1$ より, $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \quad \bar{z} = \frac{1}{z}$ であるから,

$$\bar{c} = \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}(-i) = \frac{1+z}{1-z}(-i) = \frac{z+1}{z-1}i = c$$

よって, $\bar{c} = c$ が成り立つから, c は実数である. $\quad \text{”}$

- (2) $c = \frac{z+i}{z-i}$ より, z から唯一つの c を計算することができる.

よって, c は一意的である. $\quad \text{”}$

- (3) 《ポイント》 ① 任意の実数 c に対して $c = \frac{z+i}{z-i}$ となる z が A の要素になれば全射である.

$$\text{② } f(z) \text{ が単射: } z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2) \quad \text{対偶 } f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2$$

$z = \frac{c+i}{c-i}$ より, 任意の実数 c に対して,

$$|z| = \left|\frac{c+i}{c-i}\right| = \frac{|c+i|}{|c-i|} = \frac{\sqrt{c^2+1^2}}{\sqrt{c^2+(-1)^2}} = 1, \quad z \neq 1 \text{ より, } z \in A \text{ であるから, 全射である.}$$

$$f(z_1) = f(z_2) \text{ とすると, } \frac{z_1+1}{z_1-1}i = \frac{z_2+1}{z_2-1}i \quad (z_1+1)(z_2-1) = (z_2+1)(z_1-1)$$

$$z_1z_2 - z_1 + z_2 - 1 = z_1z_2 + z_1 - z_2 - 1 \quad z_1 = z_2$$

よって, $f(z_1) = f(z_2)$ ならば, $z_1 = z_2$ が成り立ち

その対偶 $z_1 \neq z_2$ ならば, $f(z_1) \neq f(z_2)$ が成り立つから, 単射である.

したがって, 写像 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ は全単射である. $\quad \text{”}$