第２章　微分積分 II《§3　重積分》

115 $D=\{(x,y,z)\mid 1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ 1\leqq z\leqq x^2+y^2\}$ とおくとき，積分
$\displaystyle\iiint_D \frac{2x^2+y^2+x}{z}\,dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大)

《ポイント：三重積分も累次積分になおして，順番に積分する.》

$D=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_{xy}\ ,\ \varphi(x,y)\leqq z\leqq\psi(x,y)\}$　(D_{xy}は平面上の領域) とするとき，

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iint_{D_{xy}}\left\{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right\}dxdy$$

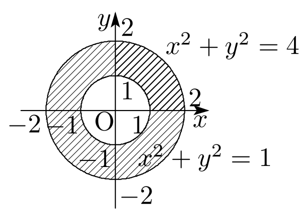
(解) $D_{xy}=\{(x,y)\mid 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\}$ とおくと,

$$I=\iiint_D \frac{2x^2+y^2+x}{z}\,dxdydz=\iint_{D_{xy}}\left\{\int_1^{x^2+y^2}\frac{2x^2+y^2+x}{z}\,dz\right\}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left\{(2x^2+y^2+x)\int_1^{x^2+y^2}\frac{1}{z}\,dz\right\}dxdy=\iint_{D_{xy}}\left\{(2x^2+y^2+x)\Big[\log z\Big]_1^{x^2+y^2}\right\}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(2x^2+y^2+x)\left\{\log(x^2+y^2)-\log 1\right\}dxdy=\iint_{D_{xy}}(2x^2+y^2+x)\cdot\log(x^2+y^2)dxdy$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta(r\geqq 0)$ とおくと,



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\qquad\therefore\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$$

領域 D_{xy} は図の斜線の部分であるから，　$1\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$

$$2x^2+y^2+x=x^2+y^2+x^2+x=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+r^2\cos^2\theta+r\cos\theta=r^2+r^2\cos^2\theta+r\cos\theta$$

$$\log(x^2+y^2)=\log r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\log r^2=2\log r$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^2(r^2+r^2\cos^2\theta+r\cos\theta)\cdot 2\log r\cdot r\,dr\right\}d\theta$$

$$=2\int_1^2\left\{\int_0^{2\pi}\left(r^3+r^3\frac{1+\cos 2\theta}{2}+r^2\cos\theta\right)\log r d\theta\right\}dr$$

$$=2\int_1^2\left\{\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}r^3+\frac{1}{2}r^3\cos 2\theta+r^2\cos\theta\right)d\theta\right\}\log r\,dr$$

$$=2\int_1^2\left[\frac{3}{2}r^3\theta+\frac{1}{4}r^3\sin 2\theta+r^2\sin\theta\right]_0^{2\pi}\log r\,dr=2\int_1^2 3\pi r^3\cdot\log r\,dr$$

$$=6\pi\int_1^2 r^3\log r\,dr=6\pi\int_1^2\left(\frac{1}{4}r^4\right)'\cdot\log r\,dr=6\pi\left\{\left[\frac{1}{4}r^4\cdot\log r\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{4}r^4\cdot(\log r)'\,dr\right\}$$

$$=6\pi\left\{4\log 2-\int_1^2\frac{1}{4}r^4\cdot\frac{1}{r}\,dr\right\}=24\pi\log 2-\frac{3}{2}\pi\int_1^2 r^3dr$$

$$=24\pi\log 2-\frac{3}{2}\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2=24\pi\log 2-\frac{3}{8}\pi(16-1)=24\pi\log 2-\frac{45}{8}\pi$$ 〃