第４章　応用数学《§1　ベクトル解析・ラプラス変換・フーリエ級数》

$\boxed{232}$ 以下の問いに答えなさい．

(1)　$\sin^2 t$ のラプラス変換を求めなさい．

(2)　$\cos^2 t$ のラプラス変換を求めなさい．

(3)　$f(t) = \sin \omega t$ （$\omega \neq 0$ の実数）とするとき，$t \sin \omega t$ のラプラス変換を求めなさい．

(大分大)

《　ポイント：ラプラス変換の定義　$\mathfrak{L}|f(t)| = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$　と公式　》

$$\mathfrak{L}|1| = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}|\cos\omega t| = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathfrak{L}|\sin\omega t| = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

[確認]

$f(t) = 1$ のとき，　$F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} \cdot 1dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty} e^{-st} + \frac{1}{s}$

$s > 0$ のとき，$\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$ であるから，$F(s) = \dfrac{1}{s}$

$s \leqq 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dt$ は存在しない．よって，$s > 0$ のとき，$f(t) = 1$ のラプラス変換は存在し，

$$\mathfrak{L}|1| = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

$s > 0$ のとき，$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\sin\omega t = \lim_{t\to\infty} e^{-st}\cos\omega t = 0$ であるから，

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left\{-\frac{1}{s}e^{-st}(-\omega)\sin\omega t\right\}dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt = \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\omega\cos\omega t\right)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\left\{0 + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t dt\right\} = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s)$$

$\therefore \left(1 + \dfrac{\omega^2}{s^2}\right)F(s) = \dfrac{1}{s}$　よって，$\dfrac{s^2+\omega^2}{s^2}F(s) = \dfrac{s}{s^2}$ より，$\therefore F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\mathfrak{L}|\cos\omega t| = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (s > 0)$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left\{-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\omega\cos\omega t\right\}dt$$

$$= 0 + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t dt = \frac{\omega}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot(-\omega)\sin\omega t\right)dt\right\}$$

$$= \frac{\omega}{s}\left\{\frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt\right\} = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s)$$

$\therefore \left(1 + \dfrac{\omega^2}{s^2}\right)F(s) = \dfrac{\omega}{s^2}$　よって，$\dfrac{s^2+\omega^2}{s^2}F(s) = \dfrac{\omega}{s^2}$ より，$\therefore F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\mathfrak{L}|\sin\omega t| = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (s > 0)$$

(解)

(1)　半角の公式より，$sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ であるから，

$$\mathfrak{L}|\sin^2 t| = \frac{1}{2}\Big(\mathfrak{L}|1| - \mathfrak{L}|\cos 2t|\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

$$\mathfrak{L}|\sin^2 t| = \frac{2}{s(s^2+4)} \quad (s>0) \quad〃$$

(2)　半角の公式より，$cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ であるから，

$$\mathfrak{L}|\cos^2 t| = \frac{1}{2}\Big(\mathfrak{L}|1| + \mathfrak{L}|\cos 2t|\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2+4+s^2}{s(s^2+4)} = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

$$\mathfrak{L}|\cos^2 t| = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)} \quad (s>0) \quad〃$$

《　ポイント：ラプラス変換の像関係の微分法　》

$\mathfrak{L}|f(t)| = F(s)$ のとき，$\mathfrak{L}|tf(t)| = -F'(s)$

[確認]

$F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ は，s の関数として微分可能で，その導関数 $F'(s)$ は，

積分記号内を s で偏微分して求められることが知られている．すなわち，

$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\Big(e^{-st}f(t)\Big)dt = \int_0^\infty (-t)e^{-st}f(t)dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = -\mathfrak{L}|tf(t)|$$

$$\therefore \mathfrak{L}|tf(t)| = -F'(s)$$

(3)　$f(t) = \sin\omega t$ のとき，$\mathfrak{L}|f(t)| = \mathfrak{L}|\sin\omega t| = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$　$\therefore F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\mathfrak{L}|tf(t)| = -F'(s) = -\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)' = -\omega\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)' = -\omega\left\{-\frac{2s}{(s^2+\omega^2)^2}\right\} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$\therefore \mathfrak{L}|t\sin\omega t| = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} \quad〃$$