第４章　応用数学《§1　ベクトル解析・ラプラス変換・フーリエ級数》

$\boxed{239}$ $f(x)$ を $-1 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{\ell}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx \quad (m = 0, 1, 2.\cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{\ell}\int_{-1}^{1} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx \quad (m = 1, 2.\cdots)$$

とする．$f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{\ell}x + b_m\sin\frac{m\pi}{\ell}x\right)$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1)　次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，$\ell = 1$ として $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2)　$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x) = \cos x$ を $\ell = \frac{\pi}{2}$ として展開し，その展開式を利用して，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大)

《　ポイント：周期 2ℓ の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数　（参考資料）　》

一般に，ℓ を正の数とするとき，周期 2ℓ の周期関数 $f(x)$ のフーリエ係数，フーリエ級数は

次のようになる．

$$c_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

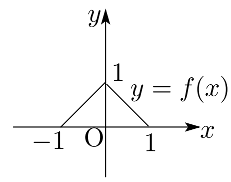
$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-1}^{1} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

(解)

(1) $f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$



このグラフは右図のようになる.

図からも明らかに関数 $f(x)$ は偶関数であるから,

$f(x)\sin m\pi x$ は奇関数である.

よって, $b_m = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin m\pi x dx = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots)$

$$c_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 (1-x)dx = 2\left[x - \frac{1}{2}x\right]_0^1 = 1$$

$$a_m = \int_{-1}^{1} f(x)\cos m\pi x dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos m\pi x dx$$

$$= 2\left\{\left[(1-x)\cdot\frac{1}{m\pi}\sin m\pi x\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\cdot\frac{1}{m\pi}\sin m\pi x dx\right\}$$

$$= \frac{2}{m\pi}\left\{[(1-x)\sin m\pi x]_0^1 + \int_0^1 \sin m\pi x dx\right\}$$

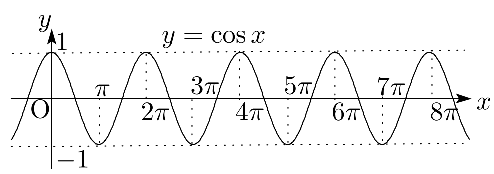
$$= \frac{2}{m\pi}\left\{0 + \left[-\frac{1}{m\pi}\cos m\pi x\right]_0^1\right\}$$

$$= \frac{2}{m\pi}\left(-\frac{1}{m\pi}\right)\left[\cos m\pi x\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{m^2\pi^2}(\cos m\pi - 1)$$

$$= \frac{2}{m^2\pi^2}(1 - \cos m\pi)$$

$$= \frac{2}{m^2\pi^2}\left\{1 - (-1)^m\right\}$$



よって, $f(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^2\pi^2}\left\{1 - (-1)^m\right\}\cos m\pi x$

ここで, $m = 1, 3, 5.\cdots$ のとき, $\left\{1 - (-1)^m = 2\right\}$

$m = 2, 4, 6.\cdots$ のとき, $\left\{1 - (-1)^m = 0\right\}$ であるから,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\pi x$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)\pi x \quad〃$$

(解)

(2) 関数 $f(x)=\cos x$ は偶関数であるから， $b_m=0 \quad (m=1,2,\cdots)$ である．

$$c_0=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{4}{\pi}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_m=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{\frac{\pi}{2}}\right)xdx=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2mxdx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos2mx\cos xdx$$

ここで， $\cos(2mx+x)=\cos mx\cos x-\sin mx\sin x$

$\cos(2mx-x)=\cos mx\cos x+\sin mx\sin x$ より，

$\cos(2mx+x)+\cos(2mx-x)=2\cos mx\cos x$

よって， $\cos mx\cos x=\dfrac{1}{2}\Big\{\cos(2m+1)x+\cos(2m-1)x\Big\}$ であるから，

$$a_m=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big\{\cos(2m+1)x+\cos(2m-1)x\Big\}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x+\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

ここで， $\sin(2m+1)\dfrac{\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+m\pi\right)=(-1)^m$

$\sin(2m-1)\dfrac{\pi}{2}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+m\pi\right)=(-1)^{m-1}$ であるから，

$$a_m=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2m+1}(-1)^m+\frac{1}{2m-1}(-1)^{m-1}\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{2m+1}(-1)^{m-1}+\frac{1}{2m-1}(-1)^{m-1}\right\}=\frac{2}{\pi}(-1)^{m-1}\left\{-\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m-1}\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}(-1)^{m-1}\frac{-(2m-1)+(2m+1)}{(2m+1)(2m-1)}=\frac{2}{\pi}(-1)^{m-1}\frac{2}{4m^2-1}=\frac{4(-1)^{m-1}}{(4m^2-1)\pi}$$

よって， $\cos x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{\pi}+\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m-1}}{(4m^2-1)\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{\frac{\pi}{2}}\right)x$

$$\therefore \cos x=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(4m^2-1)}\cos 2mx$$

この展開式に $x=0$ を代入すると，

$\cos 0=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(4m^2-1)}\cos 0$ より，　　$1=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(4m^2-1)}$

$\pi-2=4\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(4m^2-1)}$　　$\therefore \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(4m^2-1)}=\frac{\pi-2}{4}$

したがって，

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{35}-\frac{1}{63}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}+\cdots=\frac{\pi-2}{4} \quad //$$