第2章　微分積分 II《§3　重積分》

$\boxed{112}$ 以下の設問に答えよ，ただし，$a>0$ である．

(1)　次の定積分の値を求めよ．必要ならば，直交座標系 (x,y) を極座標系 (r,θ) に変換せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ay^2}\,dxdy$$

(2)　次の等式を証明せよ．

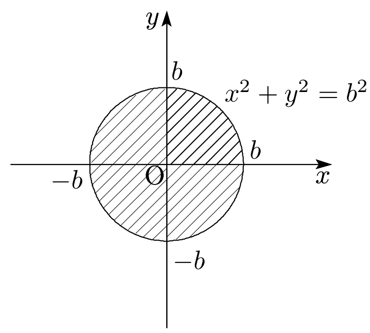
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(東京大)

《ポイント：円の内部の領域で積分を考え，極座標変換を利用する.》

(解)

(1)　$b>0$ とし，不等式 $x^2+y^2 \leqq b^2$ の表す領域を D_b とする．



$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\quad(r\geqq 0)$ とおくと，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\qquad\therefore\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$$

領域 D_b は図の斜線の部分であるから，

$0\leqq r\leqq b,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$ と表せる．

$e^{-ax^2}e^{-ay^2}=e^{-a(x^2+y^2)}=e^{-ar^2}$ に着目して，

$$\iint_{D_b} e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^b e^{-ar^2}r\,dr\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2a}e^{-ar^2}\right]_0^b d\theta=\int_0^{2\pi}\left\{-\frac{1}{2a}\left(e^{-ab^2}-e^0\right)\right\}d\theta=\frac{1}{2a}\left(1-e^{-ab^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2a}\left(1-e^{-ab^2}\right)\Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi}=\frac{1}{2a}\left(1-e^{-ab^2}\right)\cdot 2\pi=\frac{\pi}{a}\left(1-\frac{1}{e^{ab^2}}\right)$$

よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ay^2}\,dxdy=\lim_{b\to\infty}\iint_{D_b} e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy=\lim_{b\to\infty}\frac{\pi}{a}\left(1-\frac{1}{e^{ab^2}}\right)=\frac{\pi}{a}\quad〃$$

(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ay^2}\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay^2}\,dy=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx\right\}^2$$

したがって，(1) より，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

よって，

$$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad〃$$