第３章　線形代数《§1　ベクトル》

$\boxed{146}$ (x, y, z) 空間における次の 2 直線の距離を求めよ.

$$\frac{x-5}{2} = -\frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{4}\,, \qquad \frac{x-3}{8} = y+7 = -\frac{z+2}{5}$$

(名古屋工業大)

《ポイント：2 直線の方向ベクトルとの内積が 0 を利用する方法》

(解)

$\dfrac{x-5}{2} = -\dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4} = s$ とおくと，　$x = 2s+5,\ y = -5s-1,\ z = 4s+3$

$\dfrac{x-3}{8} = y+7 = -\dfrac{z+2}{5} = t$ とおくと，　$x = 8t+3,\ y = t-7,\ z = -5t-2$

よって，2 直線上の任意の点はそれぞれ

$A(2s+5,\ -5s-1,\ 4s+3),\ B(8t+3,\ t-7,\ -5t-2)$ と表される.

$$\overrightarrow{AB} = \Big((8t+3)-(2s+5),\ (t-7)-(-5s-1),\ (-5t-2)-(4s+3)\Big)$$

$$= (-2s+8t-2,\ 5s+t-6,\ -4s-5t-5)$$

2 直線の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{m} = (2,-5,4),\ \overrightarrow{n} = (8,1,-5)$ とおくと

線分 AB が最短になるとき，$\overrightarrow{AB}$ が 2 直線に直交するから　$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AB} = 0,\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ である.

したがって

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AB} = 2(-2s+8t-2)-5(5s+t-6)+4(-4s-5t-5) = -3(15s+3t-2) = 0$$

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AB} = 8(-2s+8t-2)+1\cdot(5s+t-6)-5(-4s-5t-5) = 3(3s+30t+1) = 0$$

$$\therefore\ \begin{cases} 15s+3t-2 = 0 \\ 3s+30t+1 = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$s = \dfrac{1}{7},\ t = -\dfrac{1}{21}$　このとき

$$AB = \sqrt{(-2s+8t-2)^2+(5s+t-6)^2+(-4s-5t-5)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{2}{7}-\frac{8}{21}-2\right)^2+\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{21}-6\right)^2+\left(-\frac{4}{7}+\frac{5}{21}-5\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{56}{21}\right)^2+\left(\frac{112}{21}\right)^2+\left(\frac{112}{21}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2}{3^2}(4+16+16)} = \frac{4}{3}\cdot 6 = 8 \quad 〃$$

《ポイント：平方完成を利用する方法》

(別解 1)

$\dfrac{x-5}{2} = -\dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4} = s$ とおくと，　$x = 2s+5,\ y = -5s-1,\ z = 4s+3$

$\dfrac{x-3}{8} = y+7 = -\dfrac{z+2}{5} = t$ とおくと，　$x = 8t+3,\ y = t-7,\ z = -5t-2$

よって，2 直線上の任意の点はそれぞれ

$A(2s+5,\ -5s-1,\ 4s+3)$，$B(8t+3,\ t-7,\ -5t-2)$ と表される．

$\overrightarrow{AB} = (-2s+8t-2,\ 5s+t-6,\ -4s-5t-5)$

$$\overline{AB}^2 = (-2s+8t-2)^2 + (5s+t-6)^2 + (-4s-5t-5)^2$$

$$= 45s^2 + 18st - 12s + 90t^2 + 6t + 65$$

$$= 45s^2 + s(18t-12) + 90t^2 + 6t + 65$$

$$= 45\left\{s^2 + \frac{2(3t-2)}{15}s + \left(\frac{3t-2}{15}\right)^2 - \left(\frac{3t-2}{15}\right)^2\right\} + 90t^2 + 6t + 65$$

$$= 45\left(s + \frac{3t-2}{15}\right)^2 - 45\left(\frac{3t-2}{15}\right)^2 + 90t^2 + 6t + 65$$

$$= 45\left(s + \frac{3t-2}{15}\right)^2 - \frac{9t^2-12t+4}{5} + 90t^2 + 6t + 65$$

$$= 45\left(s + \frac{3t-2}{15}\right)^2 + \frac{441}{5}t^2 + \frac{42}{5}t + \frac{321}{5}$$

$$= 45\left(s + \frac{3t-2}{15}\right)^2 + \frac{441}{5}\left\{t^2 + \frac{2}{21}t + \left(\frac{1}{21}\right)^2 - \left(\frac{1}{21}\right)^2\right\} + \frac{321}{5}$$

$$= 45\left(s + \frac{3t-2}{15}\right)^2 + \frac{441}{5}\left(t + \frac{1}{21}\right)^2 - \frac{1}{5} + \frac{321}{5}$$

$$= 45\left(s + \frac{3t-2}{15}\right)^2 + \frac{441}{5}\left(t + \frac{1}{21}\right)^2 + 64$$

$$\begin{cases} s + \dfrac{3t-2}{15} = 0 \\[2mm] t + \dfrac{1}{21} = 0 \end{cases}$$

すなわち，$s = \dfrac{1}{7}$，　$t = -\dfrac{1}{21}$ のとき

AB^2 は最小値 64 をとる．

よって，AB の最小値は 8 である．〃

《ポイント：偏微分を利用する方法》

(別解 2)

$\dfrac{x-5}{2} = -\dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4} = s$ とおくと，　$x = 2s+5,\ y = -5s-1,\ z = 4s+3$

$\dfrac{x-3}{8} = y+7 = -\dfrac{z+2}{5} = t$ とおくと，　$x = 8t+3,\ y = t-7,\ z = -5t-2$

よって，2 直線上の任意の点はそれぞれ

$A(2s+5,\ -5s-1,\ 4s+3),\ B(8t+3,\ t-7,\ -5t-2)$ と表される．

$\overrightarrow{AB} = (-2s+8t-2,\ 5s+t-6,\ -4s-5t-5)$

$AB^2 = (-2s+8t-2)^2 + (5s+t-6)^2 + (-4s-5t-5)^2$

$\quad = 45s^2 + 18st - 12s + 90t^2 + 6t + 65$

$AB^2 = f(s,t)$ とおくと

$f(s,t) = 45s^2 + 18st - 12s + 90t^2 + 6t + 65$

$f_s = 90s + 18t - 12 = 6(15s + 3t - 2)$

$f_t = 18s + 180t + 6 = 6(3s + 30t + 1)$

$f_s = f_t = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 15s + 3t - 2 = 0 \\ 3s + 30t + 1 = 0 \end{cases}$$

これを解いて，$s = \dfrac{1}{7},\ t = -\dfrac{1}{21}$

よって，$\left(\dfrac{1}{7},\ -\dfrac{1}{21}\right)$ で極値を持ち得る．

$f_{ss} = 90,\ f_{tt} = 180,\ f_{st} = f_{ts} = 18$

$H = f_{ss} \cdot f_{tt} - (f_{st})^2 = 90 \times 180 - 18^2 > 0$　かつ　$f_{ss} = 90 > 0$

よって，$\left(\dfrac{1}{7},\ -\dfrac{1}{21}\right)$ で極小値を持つ．

$$f\left(\frac{1}{7},\ -\frac{1}{21}\right) = 45\left(\frac{1}{7}\right)^2 + 18\left(\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{21}\right) - 12\left(\frac{1}{7}\right) + 90\left(-\frac{1}{21}\right) + 6\left(-\frac{1}{21}\right) + 65$$

$$= \frac{45}{49} - \frac{6}{49} - \frac{12}{7} + \frac{10}{49} - \frac{2}{7} + 65 = 64$$

$\therefore\ AB = \sqrt{64} = 8$　〃