第３章　線形代数《§2　行列と行列式》

$\boxed{159}$ $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ とおく．A が逆行列をもつための条件を求め，更にその場合の逆行列を求めよ．

(東京工業大)

《　ポイント：正則であるための条件と逆行列　》

行列 A が正則であるための条件は $|A| \neq 0$ であり，

このとき，　$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$　　($\widetilde{A}$ は A の余因子行列)

(解)

逆行列をもつ条件は,

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-2a=a(a^2-2)\neq 0 \qquad \therefore\ a\neq 0,\ a\neq \pm\sqrt{2} \quad /\!/$$

ここで，余因子行列を用いて逆行列を求めると，

$$\widetilde{a}_{11}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1 \qquad \widetilde{a}_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}=-a \qquad \widetilde{a}_{13}=\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$\widetilde{a}_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}=-a \qquad \widetilde{a}_{22}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}=a^2 \qquad \widetilde{a}_{23}=-\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-a$$

$$\widetilde{a}_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad \widetilde{a}_{32}=-\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-a \qquad \widetilde{a}_{33}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{a(a^2-2)}\begin{pmatrix} a^2-1 & -a & 1 \\ -a & a^2 & -a \\ 1 & -a & a^2-1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

[確認]

$$AA^{-1}=\frac{1}{a(a^2-2)}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2-1 & -a & 1 \\ -a & a^2 & -a \\ 1 & -a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a(a^2-2)}\cdot\begin{pmatrix} a(a^2-1)-a & -a^2+a^2 & a-a \\ a^2-1-a^2+1 & -a+a^3-a & 1-a^2+a^2-1 \\ -a+a & a^2-a^2 & -a+a(a^2-1) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a(a^2-2)}\cdot\begin{pmatrix} a(a^2-2) & 0 & 0 \\ 0 & a(a^2-2) & 0 \\ 0 & 0 & a(a^2-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

よって，A^{-1} は A の逆行列である．