第３章　線形代数《§2　行列と行列式》

$\boxed{160}$ 行列 A を $A=\begin{pmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．ただし，x と y は実数とする．

以下の問いに答えよ．なお，${}^tX$ を X の転置行列とすると，$X=-\,{}^tX$ を満たす X を交代行列と呼ぶ．また，$X={}^tX$ を満たす X を対称行列と呼ぶ．A は交代行列と対称行列の和で表すことができる．

交代行列を T，対称行列を S とするとき，T と S を求めよ．

(東京大)

《ポイント》任意の正方行列 A に対して，　$A=\dfrac{1}{2}\left(A+{}^tA\right)+\dfrac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)$ が成り立つ．

ここで，$\dfrac{1}{2}\left(A+{}^tA\right)$ は対称行列，$\dfrac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)$ は交代行列である．

(解)

$$A=\begin{pmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より，} \quad {}^tA=\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ \frac{1}{4} & 1-x & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ であるから，}$$

$$S=\frac{1}{2}\left(A+{}^tA\right)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ \frac{1}{4} & 1-x & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x & \frac{5}{4} & y+1 \\ \frac{5}{4} & 2(1-x) & 2 \\ y+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & \frac{5}{8} & \frac{y+1}{2} \\ \frac{5}{8} & 1-x & 1 \\ \frac{y+1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad /\!\!/$$

$$T=\frac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ \frac{1}{4} & 1-x & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 1-y \\ \frac{3}{4} & 0 & 2 \\ y-1 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{y-1}{2} \\ \frac{3}{8} & 0 & 1 \\ \frac{y-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad /\!\!/$$

[確認]

$$S+T=\begin{pmatrix} x & \frac{5}{8} & \frac{y+1}{2} \\ \frac{5}{8} & 1-x & 1 \\ \frac{y+1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{y-1}{2} \\ \frac{3}{8} & 0 & 1 \\ \frac{y-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}=A$$

$$S=\begin{pmatrix} x & \frac{5}{8} & \frac{y+1}{2} \\ \frac{5}{8} & 1-x & 1 \\ \frac{y+1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tS=\begin{pmatrix} x & \frac{5}{8} & \frac{y+1}{2} \\ \frac{5}{8} & 1-x & 1 \\ \frac{y+1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より，}$$

よって，$S={}^tS$ が成り立つから，S は対称行列である．

$$T=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{y-1}{2} \\ \frac{3}{8} & 0 & 1 \\ \frac{y-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tT=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & \frac{y-1}{2} \\ -\frac{3}{8} & 0 & -1 \\ -\frac{y-1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ より，}$$

よって，$T=-\,{}^tT$ が成り立つから，T は交代行列である．