第３章　線形代数《§３　線形変換》

$\boxed{184}$ $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f は.

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$ に, それぞれ写すとする.

(1)　ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ の線形写像 f による像を求めなさい.

(2)　線形写像 f で $\begin{pmatrix}-1\\-3\\9\end{pmatrix}$ に写される $\mathbb{R}^3$ の元を求めなさい.

(お茶の水女子大)

《ポイント》$\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 線形独立な $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の線形結合で,

$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$　(a, b, c は定数) と一意的に表すことができる.

線形変換について, $f(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3) = af(\boldsymbol{u}_1) + bf(\boldsymbol{u}_2) + cf(\boldsymbol{u}_3)$ が成り立つから,

$f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$ がわかれば, $f(\boldsymbol{x})$ を求めることができる.

(解)

(1)　$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とおくと,

$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は線形独立なベクトルであり,

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

と表される.

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}f(\boldsymbol{u}_1) + \frac{1}{2}f(\boldsymbol{u}_2) + \frac{1}{2}f(\boldsymbol{u}_3) = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \quad〃$$

(2) 求める $\mathbb{R}^3$ の元を $a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$ とおく，また，$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ とおく.

$f(a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3) = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}$ となる a, b, c を求める.

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a - b + 5c = -1 \\ -a + 4b + c = -3 \\ 4a + b - c = 9 \end{cases}$$

これを解くと，$a = 2,\ b = 0,\ c = -1$

よって，求める解は,

$$a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 〃$$

《 ポイント：逆行列を利用して解く方法 》

(別解)

(1) $U = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$|U| = -2 \neq 0$ であるから，U は逆行列をもつ.

$$\therefore U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，線形写像 f の表す行列を A とすると，　$AU = V$

$$\therefore A = VU^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の f による像は,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 〃$$

《　ポイント：逆行列を利用して解く方法 》

(別解)

(2)　$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 49 \neq 0$

よって，A は逆行列をもつ．

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 14 \\ 11 & 1 & 7 \\ 7 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

求める解を $\boldsymbol{x}$ とすると，

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 14 \\ 11 & 1 & 7 \\ 7 & 14 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 98 \\ 49 \\ -49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

《ポイント：連立方程式で解く方が簡単である．》

(別解 2)

(2)　求める解を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y + z = -1 \\ x - 2y + 3z = -3 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

これを解いて，$x = 2,\ y = 1,\ z = -1$

よって，求める解は，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad /\!/$

《 ポイント：行基本変形によって逆行列を求める. 》

(i)　１つの行に 0 でない数を掛ける.

(ii)　１つの行にある数を掛けたものを他の行に加える.

(iii)　２つの行を入れ換える.

[確認：U の逆行列]

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める.

$$\begin{array}{c} \quad U \qquad\qquad E \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{1 行と 2 行を入れ換える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2 行+1 行× (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{3 行+2 行× (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{3 行×} \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2 行+3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{1 行+3 行× (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\therefore U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

《　ポイント：余因子行列を用いて逆行列を求める方法　》

行列 A が正則であるための条件は $|A| \neq 0$ であり,

このとき,　$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$　($\widetilde{A}$ は A の余因子行列)

[確認：A の逆行列]

$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ において,

$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 49 \neq 0$　　よって，A は正則である.

余因子行列を用いて A の逆行列を求める.

$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$　$\widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 11$　$\widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$

$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9$　$\widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$　$\widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 14$

$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 14$　$\widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$　$\widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 14 \\ 11 & 1 & 7 \\ 7 & 14 & 0 \end{pmatrix}$ 〃