第３章　線形代数《§３　線形変換》

$\boxed{190}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする，次の問いに答えなさい．

(1) 線形変換を f によって，直線 ℓ : $x-1=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$ がどのような図形に移るか答えなさい．

(2) 線形変換を f によって，平面 α : $x+y+z=1$ がどのような図形に移るか答えなさい．

(3) 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい．

(4) 線形変換を f によって，平面 β : $x+y=1$ に移されるもとの図形を求めなさい．

(岩手大)

《ポイント：正則な行列の表す線形変換により図形の像を求める方法は次の２通りある.》

もとの図形の点の座標を (x,y,z)，その点の像の座標を (X,Y,Z) とすると，X,Y は x,y で表せる．

① x,y を媒介表示　→　X,X を媒介表示　→　媒介表示を消去

② x,y を X,Y で表す　→　もとの図形の方程式に代入する．

① は正則でない場合も使える，　② は媒介表示が難しい場合にも使える．

(解)

点 (x,y,z) が f により点 (X,Y,Z) に移ったとすると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} X= & x+z \\ Y= & y+2z \\ Z= & x-z \end{cases}$$

(1) 《①を利用》

$x-1=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}=t$ とおくと，

$$\begin{cases} x= & t+1 \\ y= & -2t-2 \\ z= & 3t-1 \end{cases} \quad \text{これを} \quad \begin{cases} X= & x+z \\ Y= & y+2z \\ Z= & x-z \end{cases} \quad \text{に代入して，}$$

$$\begin{cases} X= & (t+1)+(3t-1) \\ Y= & (-2t-2)+2(3t-1) \\ Z= & (t+1)-(3t-1) \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} X= & 4t \\ Y= & 4t-4 \\ Z= & -2t+2 \end{cases}$$

これから，

$\therefore t=\dfrac{X}{4}=\dfrac{Y+4}{4}=\dfrac{Z-2}{-2}$

$\therefore \dfrac{X}{2}=\dfrac{Y+4}{2}=\dfrac{Z-2}{-1}$

したがって，直線 ℓ は $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ に移る．〃

(2)　《② を利用》

$$\begin{cases} X = & x+z \\ Y = & y+2z \\ Z = & x-z \end{cases} \quad \text{を変形して,} \qquad \begin{cases} x = & \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Z \\ y = & -X+Y+Z \\ z = & \frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Z \end{cases}$$

これを平面 $x+y+z=1$ に代入して,

$$\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Z-X+Y+Z+\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Z=1 \qquad \therefore Y+Z=1$$

したがって，平面 α は平面 $y+z=1$ に移る．〃

(3)　《② を利用》

(2) より $\begin{cases} x = & \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Z \\ y = & -X+Y+Z \\ z = & \frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Z \end{cases}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Z \\ -X+Y+Z \\ \frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ここで，$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{であるから,}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad〃$$

(4)　《② を利用》

点 (X, Y, Z) が平面 β ： $x+y=1$ 上の点とすると,

$X+Y=1$　が成り立つ．

また，f により，この点 (X, Y, Z) に移るもとの図形上の点を (x, y, z) とすると,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} X = & x+z \\ Y = & y+2z \\ Z = & x-z \end{cases}$$

これを $X+Y=1$ に代入して,

$$(x+z)+(y+2z)=1 \qquad \therefore x+y+3z=1$$

したがって，もとの図形は平面 $x+y+3z=1$ 全体である．〃

(別解)

点 (x,y,z) が f により点 (X,Y,Z) に移ったとすると,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} X = & x+z \\ Y = & y+2z \\ Z = & x-z \end{cases}$$

(1)　《② を利用》

$$\begin{cases} X = & x+z \\ Y = & y+2z \\ Z = & x-z \end{cases} \quad \text{を変形して,} \qquad \begin{cases} x = & \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Z \\ y = & -X+Y+Z \\ z = & \frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Z \end{cases}$$

これを直線 $x-1=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$ に代入して,

$\dfrac{1}{2}X+\dfrac{1}{2}Z-1=-\dfrac{1}{2}(-X+Y+Z+2)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{2}Z+1\right)$

$\therefore 3X+3Z-6=3X-3Y-3Z-6=X-Z+2$

そこで, $3X+3Z-6=X-Z+2$ より $2X=-4Z+8$ $\therefore X=-2Z+4$

また, $3X+3Z-6=3X-3Y-3Z-6$ より $6Z=-3Y$ $\therefore Z=-\dfrac{1}{2}Y$

よって, $X=-2\left(-\dfrac{1}{2}Y\right)+4$ $\therefore X=Y+4$

これらから, $X=Y+4=-2Z+4$ $\therefore \dfrac{X}{2}=\dfrac{Y+4}{2}=\dfrac{Z-2}{-1}$

したがって, 直線 ℓ は $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ に移る. 〃

(2)　《① を利用》

$x+y+z=1$ を媒介表示で表すと,;

$$\begin{cases} x = & \sin^2\theta\cos^2\varphi \\ y = & \sin^2\theta\sin^2\varphi \\ z = & \cos^2\theta \end{cases} \quad \text{これを} \quad \begin{cases} X = & x+z \\ Y = & y+2z \\ Z = & x-z \end{cases} \quad \text{に代入すると,}$$

$$\begin{cases} X = & \sin^2\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta \\ Y = & \sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta \\ Z = & \sin^2\theta\cos^2\varphi-\cos^2\theta \end{cases}$$

これから　$X-Z=2\cos^2\theta$　が成り立つ. また,

$X+Z=2\sin^2\theta\cos^2\varphi=2\sin^2\theta(1-\sin^2\varphi)=2\sin^2\theta-2\sin^2\theta\sin^2\varphi$

$=2(1-\cos^2\theta)-2\sin^2\theta\sin^2\varphi=2-2\cos^2\theta-2\sin^2\theta\sin^2\varphi$

$=2+2\cos^2\theta-2(\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta)=2+(X-Z)-2Y$

よって, $X+Z=2+X-Z-2Y$ $\therefore Y+Z=1$

したがって, 平面 α は平面 $y+z=1$ に移る. 〃

(3)　《行基本変形を利用》

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める.

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad E \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{3 行+1 行× (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{3 行× }(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{1 行+3 行× (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2 行+3 行× (-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

《余因子行列を利用》

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,　　$|A| = -2 \neq 0$ より A は正則である.　よって余因子を求めると,

$$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad \widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad \widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(4) 《① を利用》

平面 β : $x+y=1$ 上の点を (X,Y,Z) とすると,

$X+Y=1$ 　が成り立つ.

これを媒介表示で表すと,

$$\begin{cases} X = & \cos^2\theta \\ Y = & \sin^2\theta \\ Z = & t \end{cases}$$

これを $\begin{cases} x = & \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Z \\ y = & -X+Y+Z \\ z = & \frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Z \end{cases}$ に代入して,

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}t \\ y = & -\cos^2\theta+\sin^2\theta+t \\ z = & \frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}t \end{cases}$$

これから

$$\begin{cases} x+y = & -\frac{1}{2}\cos^2\theta+\sin^2\theta+\frac{3}{2}t \\ 3z = & \frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{2}t \end{cases}$$

が成り立つ. 辺々加えると,

$x+y+3z=\cos^2\theta+\sin^2\theta$ 　　$\therefore x+y+3z=1$

したがって, もとの図形は平面 $x+y+3z=1$ の全体である. 〃