第３章　線形代数《§4　固有値とその応用》

$\boxed{203}$ $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問いに答えよ;

(1)　行列 A の固有値 λ を全て求めよ.

(2)　A を直交行列によって対角化せよ.

(3)　ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを 1 とする．${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の値が最大となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である.

(4)　n を自然数とするとき，a^n を求めよ.

(茨城大)

(解)

(1)　《 ポイント：固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を解くと固有値 λ が求められる．》

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\therefore |A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-2-\lambda)^3+2-3(-2-\lambda)=-\left\{(\lambda+2)^3-3(\lambda+2)-2\right\}$$

$$=-\left\{(\lambda+2)+1\right\}\left\{(\lambda+2)^2-(\lambda+2)-2\right\}=-\lambda(\lambda+3)^2=0$$

$\therefore \lambda=0$,　$\lambda=-3$ (2 重解)　〃

《　ポイント：グラム・シュミットの正規直交化法　》

与えられた $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ から，次のようにして正規直交系

（大きさ１のベクトルで，互いに直交するベクトルの組）$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を作る方法.

[注意]　$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_1=0$　　$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3=1$

①　$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|}$ とする.　　　（ $\boldsymbol{u}_1$は$\boldsymbol{a}_1$ の大きさを 1 にしたもの.

②　$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ とおき，　$\boldsymbol{u}_2=\dfrac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|}$ とする.

($\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ に張られる平面上にあり，$\boldsymbol{u}_1$ に垂直なもの.)

③　$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$ とおき，　$\boldsymbol{u}_3=\dfrac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|}$ とする.

($\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ に垂直なもの.)

《 ポイント：n 次正方行列 A の対角化について 》

n 個の線形独立な固有ベクトルを求めることができれば，それらのベクトルを並べて

直交行列 P を作り，A を対角化できる.

(2) $\lambda = 0$ のとき;

$$(A - 0 \cdot E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + x + y \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

これより　$x = y = z$　　であるから，$x = y = z = C_1$ とおくと，

$\lambda = 0$ に対する固有ベクトルは，$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

したがって，$\lambda = 0$ に対する固有ベクトルは，$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(C_1 \neq 0)$　〃

$\lambda = -3$ のとき; $(A - (-3) \cdot E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1 & 1 \\ 1 & -2+3 & 1 \\ 1 & 1 & -2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x + y \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

これより　$x = -y - z$　　であるから，

$y = C_2,\ z = C_3$ とおくと，$x = -C_2 - C_3$

$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} -C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって，$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは，

$C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(C_2 \neq 0$ また，$C_3 \neq 0)$　〃

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき,

グラム・シュミットの直交化法を行うと,

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$$

ここで, $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ であるから, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{b}_2|}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

ここで,

$$\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから,

$$\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ここで, $|\boldsymbol{b}_3| = \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ であるから,

$$\therefore \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{b}_3|}\boldsymbol{b}_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$ とおくと,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad 〃$$

(3) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ となるように，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ を定めると，${}^t\boldsymbol{x} = (x' \ \ y' \ \ z')$

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{x}')A(P\boldsymbol{x}') = ({}^t\boldsymbol{x}' \, {}^tP)A(P\boldsymbol{x}') = {}^t\boldsymbol{x}'({}^tPAP)\boldsymbol{x}'$$

$$= {}^t\boldsymbol{x}' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}' = (x' \ \ y' \ \ z') \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= (0 \ \ -3y' \ \ -3z') \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -3{y'}^2 - 3{z'}^2 = -3({y'}^2 + {z'}^2)$$

よって，$y' = z' = 0$ のとき，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は最大値 0 をとる．

$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ より，${}^tP\boldsymbol{x} = {}^tPP\boldsymbol{x}' \quad \therefore \ \boldsymbol{x}' = {}^tP\boldsymbol{x}$

$$|\boldsymbol{x}'|^2 = {}^t\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' = {}^t({}^tP\boldsymbol{x})({}^tP\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}P\,{}^tP\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2 = 1$$

また，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ より，

$|\boldsymbol{x}'|^2 = {x'}^2 + {y'}^2 + {y'}^2 = 1$ であるから，

$y' = z' = 0$ のとき，${x'}^2 = 1 \quad \therefore x' = \pm 1$

$$\therefore \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は最大値 0 をとる．

このとき，

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(4) (2) の結果より,

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ A^n = P\underbrace{(\,{}^tPAP)(\,{}^tPAP)(\,{}^tPAP)(\,{}^tPAP)\cdots(\,{}^tPAP)}_{n\text{ 個}}\,{}^tP $$

$$ = P(\,{}^tPAP)^n\,{}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} (-3)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} $$

$$ = (-3)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} $$

$$ = (-3)^n \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} $$

$$ = (-3)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (-3)^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 〃 $$

(4) 別解 《　ポイント：$A^2 = -3A$ が成り立つことを利用する．　》

$$ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ より,} $$

$$ A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} $$

$$ = -3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -3A $$

$$ \therefore A^2 = -3A $$

$$ A^3 = -3A^2 = (-3)^2 A $$

$$ A^4 = -3A^3 = (-3)^3 A $$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$ A^n = -3A^{n-1} = (-3)^{n-1} A $$

$$ \therefore A^n = (-3)^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 〃 $$