第３章　線形代数《§4　固有値とその応用》

$\boxed{209}$ 次の行列 A について，以下の設問に答えよ．ただし，$0 < a < \dfrac{1}{2}$ とする．

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

(1) A^2 を計算せよ．

(2) $|A|$ を計算せよ．

(3) A^{-1} を計算せよ．

(4) A の固有値と，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．
ただし，固有ベクトルの大きさが 1 になるように規格化すること．

(5) A^{-1}，A^2 および A^n の固有値を求めよ，ただし，n は自然数とする．

(6) A^n を求めよ．

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(島根大)

(解)

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+(1-a)^2 & 2a(1-a) \\ 2a(1-a) & (1-a)^2+a^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2a^2-2a+1 & 2a(1-a) \\ 2a(1-a) & 2a^2-2a+1 \end{pmatrix}$ 〃

(2) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{vmatrix} = a^2-(1-a)^2 = 2a-1$ 〃

(3) $0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，$|A| = 2a-1 \neq 0$ だから，A^{-1} は存在し，

$A^{-1} = \dfrac{1}{2a-1}\begin{pmatrix} a & -(1-a) \\ -(1-a) & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix}$ 〃

(4) A の固有値を λ とすると，固有方程式 $|A-\lambda E| = 0$ より，

$|A-\lambda E| = \left|\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1-a \\ 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)^2-(1-a)^2 = (\lambda-1)(\lambda-2a+1) = 0$

よって，求める A の固有値は $\lambda = 1$，$\lambda = 2a-1$ である． 〃

A の固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおくと,

$\lambda = 1$ のとき, $(A - 1 \cdot E)\boldsymbol{x} = 0$ であるから,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-a & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (a-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a-1) \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より, $a - 1 \neq 0$ であるから,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore x_1 = x_2$$

よって, $x_1 = x_2 = C_1$ とおくと,

$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし,}\ C_1 \neq 0$$

したがって, 固有値 $\lambda = 1$ のときの長さ 1 に規格化された固有ベクトルは

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

$\lambda = 2a - 1$ のとき, $\{A - (2a-1)E\}\,\boldsymbol{x} = 0$ であるから,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} - (2a-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-(2a-1) & 1-a \\ 1-a & a-(2a-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+1 & 1-a \\ 1-a & -a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= -(a-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(a-1) \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より, $-(a-1) \neq 0$ であるから,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore x_2 = -x_1$$

よって, $x_1 = C_2$ とおくと, $x_2 = -C_2$

$\lambda = 2a - 1$ のときの固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ -C_2 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし,}\ C_2 \neq 0$$

したがって, 固有値 $\lambda = 2a - 1$ のときの長さ 1 に規格化された固有ベクトルは

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(5) 《　ポイント：固有値と固有ベクトルの定義を利用する．　》

λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルとすると，

(i) $\quad A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$

両辺の左側から A^{-1} を掛けると，

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{x}) \qquad \therefore \boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{x}$$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，$\lambda = 2a-1 \neq 0$，　また，$\lambda = 1 \neq 0$ ．　よって，固有値 $\lambda \neq 0$ であるから，

$$A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$$

よって，定義とり，A^{-1} の固有値は $\dfrac{1}{\lambda}$ である．

ここで，$\dfrac{1}{\lambda} = 1$，$\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{2a-1}$ であり，また，$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，$1 \neq \dfrac{1}{2a-1}$ であるから，

A^{-1} の固有値は 1，$\dfrac{1}{2a-1}$ であり，A^{-1} は 2 次の正方行列だから固有値は他にない．

したがって，A^{-1} の固有値は 1，$\dfrac{1}{2a-1}$　〃

(ii) $\quad A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$

両辺の左側から A を掛けると，

$$AA\boldsymbol{x} = A\lambda\boldsymbol{x} \text{ より，} \qquad A^2\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x}$$

$$\therefore A^2\boldsymbol{x} = (\lambda)^2\boldsymbol{x}$$

よって，定義より，A^2 の固有値は $(\lambda)^2$ である．

ここで，$(\lambda)^2 = 1$，$(\lambda)^2 = (2a-1)^2$ であり，

また，$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，$1 \neq (2a-1)^2$ であるから，

A^2 の固有値は 1，$(2a-1)^2$ であり，A^2 は 2 次の正方行列だから固有値は他にない．

したがって，A^2 の固有値は 1，$(2a-1)^2$　〃

(iii) 同様にして，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$
$$A^2\boldsymbol{x} = (\lambda)^2\boldsymbol{x}$$
$$A^3\boldsymbol{x} = (\lambda)^3\boldsymbol{x}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A^n\boldsymbol{x} = (\lambda)^n\boldsymbol{x}$$

よって，定義により，A^n の固有値は $(\lambda)^n$ である．

ここで，$(\lambda)^n = 1$，$(\lambda)^n = (2a-1)^n$ であり，

また，$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，$1 \neq (2a-1)^n$ であるから，

A^n の固有値は 1，$(2a-1)^n$ であり，A^n は 2 次の正方行列だから固有値は他にない．

したがって，A^n の固有値は 1，$(2a-1)^n$　〃

(6) (4) の結果を利用して,

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とし, $P = (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2)$ とおくと,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|P| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \neq 0$ より, P は逆行列をもつ.

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2a-1 & -2a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(2a-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = P\,\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots\cdots\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{ 個}}\,P^{-1}$$

$$\therefore A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$$

ここで,

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^3 \end{pmatrix}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

同様にして, $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^n \end{pmatrix}$ であるから,

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (2a-1)^n \\ 1 & -(2a-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2a-1)^n & 1-(2a-1)^n \\ 1-(2a-1)^n & 1+(2a-1)^n \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(7) $0 < a < \dfrac{1}{2}$ より, $0 < 2a < 1$

よって, $-1 < 2a-1 < 0$ であるから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a-1)^n = 0$ が成り立つ.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2a-1)^n & 1-(2a-1)^n \\ 1-(2a-1)^n & 1+(2a-1)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

《　ポイント：ケーリー・ハミルトンの定理　》

任意の $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)=0$

固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ の解を　$\lambda=\alpha,\ \lambda=\beta$ とすると，

ケーリー・ハミルトンの定理より，$(A-\alpha E)(A-\beta E)=0$ が成り立つ.

$I=\dfrac{A-\beta E}{\alpha-\beta}$，　$J=\dfrac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$ とおくと，

(1) $I+J=E$　　(2) $IJ=JI=0$　　(3) $I^2=I,\ J^2=J$　　(4) $A=\alpha I+\beta J$

【(6) 別解】

$A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ ついて，ケーリー・ハミルトンの定理より，

$A^2-2aA+(2a-1)E=0 \quad \therefore (A-1\cdot E)\{A-(2a-1)\cdot E\}=0$

$$A-1\cdot E=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-a & a-1 \end{pmatrix}=(a-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-(2a-1)E=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2a-1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix}=-(a-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I=\frac{A-(2a-1)E}{1-(2a-1)}=\frac{1}{-2(a-1)}\left\{-(a-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J=\frac{A-1\cdot E}{(2a-1)-1}=\frac{1}{2(a-1)}\left\{(a-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ とおくと，

(i) $I+J=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E \qquad \therefore I+J=E$

(ii) $IJ=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$　　同様にして，　$\therefore IJ=JI=0$

(iii) $I^2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=I \qquad \therefore I^2=I$

$J^2=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=J \qquad \therefore J^2=J$

(iv) $1\cdot I+(2a-1)\cdot J=I+J+2(a-1)J=E+2(a-1)J$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(a-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}=A \qquad \therefore A=I+(2a-1)J$

よって，(i)〜(iv) を用いて計算すると，

$A^2=\{I+(2a-1)J\}^2=I^2+2(2a-1)IJ+(2a-1)^2J^2$

$\therefore A^2=I+(2a-1)^2J$

$A^3=A^2\cdot A=\left\{I+(2a-1)^2J\right\}\{I+(2a-1)J\}=I^2+\left\{(2a-1)^2+(2a-1)\right\}IJ+(2a-1)^3J^2$

$\therefore A^3=I+(2a-1)^3J$

同様にして，

$\therefore A^n=I+(2a-1)^nJ$

$$\therefore A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+(2a-1)^n\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2a-1)^n & 1-(2a-1)^n \\ 1-(2a-1)^n & 1+(2a-1)^n \end{pmatrix} \quad /\!/$$