第３章　線形代数《§５　ベクトル空間》

$\boxed{217}$ $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&4\\2&3&5\end{pmatrix}$ が定める線形写像 $T:\mathbb{A}^3\to\mathbb{A}^3$ $\left(T(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\right)$ を考える.

(1)　写像 T の像 $\mathrm{Im}\,T$ の基底を 1 組求めよ.

(2)　写像 T の核 $\mathrm{Ker}\,T$ の基底を 1 組求めよ.

(埼玉大)

《　ポイント：次元定理　$\dim\mathrm{Ker}\,f+\dim\mathrm{Im}\,f=\dim V$　》

線形写像 $f;V\to W$ による像 $\mathrm{Im}\,f$ は W の部分集合である．また，V 部分集合 $\left\{\boldsymbol{x}\in V\mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\right\}$ を f の核といい $\mathrm{Ker}\,f$ で表す．$\mathrm{Ker}\,f$ は V の部分集合である．$\mathrm{Ker}\,f$ は写像 f によって $\boldsymbol{0}$ につぶされる部分集合と考えることができる.

(解)

(1)　$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$，　また，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，

$A=(\boldsymbol{u}_1\quad\boldsymbol{u}_2\quad\boldsymbol{u}_3)$ と表されるから，

$\mathrm{Im}\,T$ の要素は $A\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u}_1\quad\boldsymbol{u}_2\quad\boldsymbol{u}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3\boldsymbol{u}_3$ と表せる.

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_2&\boldsymbol{u}_3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&4\\2&3&5\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\xrightarrow{1\text{ 列と 2 列の交換}}\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{u}_2&\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&4\\3&2&5\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\xrightarrow{3\text{ 列}+1\text{ 列}\times(-3)}\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{u}_2&\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_3-3\boldsymbol{u}_2\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&-4\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\xrightarrow{3\text{ 列}+2\text{ 列}\times 2}\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{u}_2&\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_3-3\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_1\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&0\end{pmatrix}\end{array}$$

3 列の変形より，$\boldsymbol{u}_3-3\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{0}$ だから，$\boldsymbol{u}_3=3\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{u}_1$

$\therefore A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3\boldsymbol{u}_3=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3(3\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{u}_1)=(x_1-2x_2)\boldsymbol{u}_1+(x_2+3x_3)\boldsymbol{u}_2$

したがって，$A\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ の線形結合で表せ，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ は線形独立であるから，

よって，$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$，すなわち，$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{Im}\,T$ の基底である.　〃

(注)　この解では $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ が基底の定義を満たしていることを，きちんと確認しているので
　　よく理解しておくこと．実際の解答では，残った列を基底にすればよい.

《ポイント：$A=(\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3)$ のとき，$|A|=0$ ならば，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ は線形従属である.》

【別解】

$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ とすると，

$A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&4\\2&3&5\end{pmatrix}=(\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3)$ と表される.

$|A|=|\,\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3\,|=\begin{vmatrix}0&1&3\\1&2&4\\2&3&5\end{vmatrix}=0$ であるから，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ は線形従属である.

$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{0}$，すなわち，$c_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ と仮定すると，

$c_1=c_2=0$ であるから，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_1$ は線形独立である.

よって，$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$; すなわち，$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{Im}\,T$ の基底である.　〃

(2) 《ポイント》連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間は行列 A を表現行列とする

線形写像 f の $\mathrm{Ker}\,f$ である．このとき，$\dim \mathrm{Im}\,f = rank\ A$

(解) $\mathrm{Ker}\,T$ の要素は連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解である．$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&4\\2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2+3x_3=0\\ x_1+2x_2+4x_3=0\\ 2x_1+3x_2+5x_3=0\end{cases}$$

これを解くと，$x_1=2x_3$ ，$x_2=-3x_3$ だから，

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\-3x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ である.　ゆえに，$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\in Ker\ T$ である.

次元定理　$\dim \mathrm{Ker}\,T+\dim \mathrm{Im}\,T=\dim V$ において，

(1) より，$\dim \mathrm{Im}\,T=2$，$\dim V=3$ だから，$\dim \mathrm{Ker}\,T=1$ が得られる.

よって，$\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$ が $\mathrm{Ker}\,T$ の基底である.　〃

【別解】

(1) より，$2\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$ だから，

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

よって，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ より，

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が成り立つから，$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, T$ である．

次元定理　$\dim \mathrm{Ker}\, T + \dim \mathrm{Im}\, T = \dim V$ において，

(1) より，$\dim \mathrm{Im}\, T = 2$，$\dim V = 3$ だから，$\dim \mathrm{Ker}\, T = 1$ が得られる;

よって，$\left\{ \boldsymbol{v} \right\}$，すなわち，$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が $\mathrm{Ker}\, T$ の基底である．　〃