第３章　線形代数《§５　ベクトル空間》

$\boxed{218}$ 次の問いに答えよ.

(1)　a, b を実数とする．$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y-3z \\ 3x+ay+bz \end{pmatrix}$$ は線形写像であることを示せ.

(2)　f の像が 2 次元となるとき，a, b はどのような条件を満たすか答えよ.

(東京工業大)

(1)《　ポイント：線形写像 f の基本性質　》

(I)　$f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q})$

(II)　$f(k\boldsymbol{p}) = kf(\boldsymbol{p})$　　（k は実数）

(解) $$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y-3z \\ 3x+ay+bz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & a & b \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ とおくと,

$$f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$$

任意のベクトル $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ と，任意の実数 $s \in \mathbb{R}$ に対し,

$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}) + A(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

$f(s\boldsymbol{u}) = A(s\boldsymbol{u}) = sA(\boldsymbol{u}) = sf(\boldsymbol{u})$

よって，$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

$f(s\boldsymbol{u}) = sf(\boldsymbol{u})$

が成り立つから,

f は線形写像である.　〃

(2) 《　ポイント：次元定理　$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$　》

線形写像 $f; V \to W$ による像 $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分集合である．

また，V 部分集合 $\{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ を f の核といい $\mathrm{Ker}\, f$ で表す．

$\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分集合である．

このとき，$\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank} A$ である．

(解) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ が 2 次元になるときは，$\mathrm{rank} A = 2$ となればよい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1 行と 2 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行+1 行× (-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 3 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3 行+1 行× (-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & a-3 & b+9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3 行+2 行× }(a\text{-3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & b+9+7(a-3) \end{pmatrix}$$

である，

$\mathrm{rank}\, A = 2$ となるには，$b + 9 + 7(a-3) = 0$ であればよい．

$\therefore 7a + b - 12 = 0$

このとき，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ は線形独立であるから，

f の像は 確かに 2 次元となる．

よって，f の像が 2 次元となるとき，a, b は条件 $7a + b = 12$ を満たす．　〃

(2) 《　ポイント：ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が線形従属ならば, $|\,\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3\,| = 0$　》

【別解 1】$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y-3z \\ 3x+ay+bz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ ay \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ -3z \\ bz \end{pmatrix}$

$= x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b \end{pmatrix}$ であるから,

f の像は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b \end{pmatrix}$ で張られる空間である.

f の像が 2 次元ならば, これら 3 つのベクトルは線形従属でなければならない, よって,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \\ 3-2b & a-b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3-2b & a-b \end{vmatrix}$$

$= 7(a-b) - 4(3-2b) = 7a + b - 12 = 0$

$\therefore 7a + b = 12$

このとき, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ は線形独立であるから, f の像は 確かに 2 次元となる.

よって, f の像が 2 次元となるとき, a, b は条件 $7a + b = 12$ を満たす.　〃

《確認》

f の像の任意なベクトル $\boldsymbol{v}$ は,

$\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$　(s, t は実数)　と表せる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s+t \\ s+t \\ 3s+at \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2s + t \\ y = s + t \\ z = 3s + at \end{cases}$$

これから, s, t を消去することにする,

$s = x - y$, $t = 2y - x$ より,　$z = 3(x-y) + a(2y - x)$

$\therefore (a-3)x - (2a-3)y + z = 0$　(a は実数)$\cdots\cdots$①

よって, $\boldsymbol{v}$ は平面 ① 上にある. すなわち, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$

したがって, f の像は確かに 2 次元である.

(2) 《　ポイント：ベクトルの線形独立と線形従属　》

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots \boldsymbol{v}_n$ が線形独立ならば,
$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ と仮定すると,
$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ が成り立つ.
$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 以外ならば，線形従属である.

【別解 2】 $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y-3z \\ 3x+ay+bz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \\ ay \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ -3z \\ bz \end{pmatrix}$

$= x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b \end{pmatrix}$ であるから,

f の像は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b \end{pmatrix}$ で張られる空間である.

f の像が 2 次元ならば，これら 3 つのベクトルは線形従属でなければならない，よって,

$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と仮定すると,

$x = y = z = 0$ は成り立たない.

このとき,

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+y+-3z=0 \\ 3x+ay+bz=0 \end{cases}$$

これから，$x = -4z$, $y = 7z$

そこで，$x = 4t$, $y = 7t$, $z = t$ とおくと，　$x = y = z = 0$ でないから，$t \neq 0$

このとき，仮定から,

$-4t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 7t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8t+7t+t \\ -4t+7t-3t \\ -12t+7at+bt \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t(7a+b-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t \neq 0$ より，　$7a+b-12=0$

このとき，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ は線形独立であるから，　確かに f の像は 2 次元となる.

よって，f の像が 2 次元となるとき，a, b は条件 $7a+b=12$ を満たす.　〃