第２章　微分積分 II《§2　偏微分》

$\boxed{77}$ 関数 $y(x)$ は $x=1$ を含むある区間で定義された連続関数で，$x=1$ で極値をとり，$y^3+3xy^2+x^3y=1$ を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $y(1)$ を求めよ．

(2) $y(x)$ の $x=1$ のまわりのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ．

(3) $x=1$ における極値が，極大，極小のいずれかを答えよ．

(東京大)

《ポイント：陰関数定理》

曲線 $f(x.y)=0$ において，$f_y \neq 0$ のとき，

定義域と値域を適当に定めると，y は x の関数として，

$y' = -\dfrac{f_x}{f_y}$ ，　$y'' = -\dfrac{f_{xx}+2f_{xy}\cdot y' + f_{yy}\cdot (y')^2}{f_y}$

特に，$y'=0$ のとき，$y'' = -\dfrac{f_{xx}}{f_y}$

(解)

(1) $f(x,y) = y^3+3xy^2+x^3y-1$ とおくと，

$y' = -\dfrac{f_x}{f_y} = -\dfrac{3y^2+3x^2y}{3y^2+6xy+x^3}$

$x=1$ で極値をもつから，

$y'(1) = -\dfrac{3y^2+3y}{3y^2+6y+1} = -\dfrac{3y(y+1)}{3y^2+6y+1} = 0$

$\therefore\ y=0,\quad y=-1$

$x=1$ かつ $y=0$ は，$f(x,y)=x^3+3xy^2+x^3y-1=0$ を満たさない．

したがって，$x=1$ かつ $y=-1$

$\therefore\ y(1) = -1$　〃

(2) $y'=0$ のとき，

$y'' = -\dfrac{f_{xx}}{f_y} = -\dfrac{6xy}{3y^2+6xy+x^3}$

これに $x=1, y=-1$ を代入して

$y'' = -\dfrac{6\cdot 1\cdot(-1)}{3(-1)^2+6\cdot 1\cdot(-1)+1^3} = -3$

よって，$y(x)$ の $x=1$ のまわりの 2 次の項までのテイラー展開は，

$$y(x) = y(1) + y'(1)\cdot\frac{x-1}{1!} + y''(1)\cdot\frac{(x-1)^2}{2!}$$
$$= -1 + 0 + (-3)\cdot\frac{(x-1)^2}{2} = -1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 \quad〃$$

(3) $x=1$ のとき極値をもち，

$y''(1) = -3 < 0$ であるから，極大である．〃

《ポイント：$f(1,y)=y^3+3y^2+y-1$ を解いて，$y'=0$ となるものを選んでもよい.》

(別解)

(1) $f(x,y)=y^3+3xy^2+x^3y-1$ とおくと，

$x=1$ のとき，

$f(1,y)=y^3+3y^2+y-1=(y+1)(y^2+2y-1)=0$

これを解いて，

$y=-1\ ,\quad y=-1\pm\sqrt{2}\cdots\cdots$①

$$y'=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{3y^2+3x^2y}{3y^2+6xy+x^3}$$

$x=1$ で極値をもつから

$$y'(1)=-\frac{3y(y+1)}{3y^2+6y+1}=0\cdots\cdots②$$

① の中で，② を満たすものは，$y=-1$ である.

$\therefore\ y(1)=-1$ 〃

(2) $y'=0$ のとき，

$$y''=-\frac{f_{xx}}{f_y}=-\frac{6xy}{3y^2+6xy+x^3}$$

これに $x=1, y=-1$ を代入して

$$y''=-\frac{6\cdot1\cdot(-1)}{3(-1)^2+6\cdot1\cdot(-1)+1^3}=-3$$

よって，$y(x)$ の $x=1$ のまわりの 2 次の項までのテイラー展開は，

$$\begin{aligned}y(x)&=y(1)+y'(1)\cdot\frac{x-1}{1!}+y''(1)\cdot\frac{(x-1)^2}{2!}\\&=-1+0+(-3)\cdot\frac{(x-1)^2}{2}\\&=-1-\frac{3}{2}(x-1)^2\end{aligned}$$ 〃

(3) $x=1$ のとき極値をもち，

$y''(1)=-3<0$ であるから，極大である. 〃