第２章　微分積分 II《§2　偏微分》

$\boxed{83}$ $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=xy(x^2+y^2-1)$ の極値を求めよ.

(金沢大)

《ポイント：$z=f(x,y)$ の極値の判定》

① $f_x=f_y=0$ を満たす点 (x,y) で極値を持つ可能性がある.

② ヘッシャン $H=f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2$ （ただし，$f_{xy}=f_{yx}$）

これに ① を代入して,

$H>0$ ならば，極値　　$H<0$ ならば，極値なし　　$H=0$ ならば，判定不能

③ $H>0$ ならば，　$f_{xx}>0$ のとき極小　　$f_{xx}<0$ のとき極大

(解)

$f(x,y)=x^3y+xy^3-xy$ において，$f_x=f_y=0$ とおくと,

$f_x=3x^2y+y^3-y=y(3x^2+y^2-1)=0$

$f_y=x^3+3xy^2-x=x(x^2+3y^2-1)=0$

(i) $x\neq 0,\ y\neq 0$ のとき

$$\begin{cases}3x^2+y^2-1=0\\ x^2+3y^2-1=0\end{cases}$$

これを解いて，$x=\pm\dfrac{1}{2}$，$y=\pm\dfrac{1}{2}$　　よって，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(ii) $x=0$ のとき　$y(y^2-1)=0$　$\therefore y=0,\ y=\pm1$　　よって，$(0,\ 0)$, $(0,\ \pm1)$

(iii) $y=0$ のとき　$x(x^2-1)=0$　$\therefore x=0,\ x=\pm1$　　よって，$(0,\ 0)$, $(\pm1,\ 0)$

$f_{xx}=6xy,\qquad f_{yy}=6xy,\qquad f_{xy}=f_{yx}=3x^2+3y^2-1$

$H=f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2=36x^2y^2-\left(3x^2+3y^2-1\right)^2$

$(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$ のとき，$H<0$ だから，極値ではない.

$\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，$H>0$ だから，極値である.

$\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号同順）のとき，$f_{xx}=6xy>0$ だから,

極小値　$f\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)=\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)\left\{\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^2-1\right\}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-1\right)=-\dfrac{1}{8}$　〃

$\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \mp\dfrac{1}{2}\right)$（複号同順）のとき，$f_{xx}=6xy<0$ だから,

極大値　$f\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \mp\dfrac{1}{2}\right)=\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\mp\dfrac{1}{2}\right)\left\{\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\mp\dfrac{1}{2}\right)^2-1\right\}=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-1\right)=\dfrac{1}{8}$　〃