第２章　微分積分 II《§2　偏微分》

$\boxed{88}$ $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0,\ x,\ y \geqq 0$ の条件の下で関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めなさい.

(筑波大)

《ポイント：ラグランジュの未定乗数法》

条件 $g(x,y)=0$ の下で，関数 $z=f(x,y)$ の極値をとる点において，

$f_x=\lambda g_x \qquad f_y=\lambda g_y \qquad$ （λ は定数）$\cdots\cdots$①

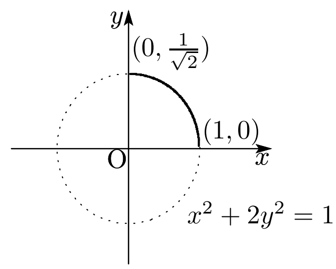
① 式と $g(x,y)=0$ を連立で解けば，極値をとり得る点を求めることができる.

《ポイント：最大値，最小値をとり得るのは，端点か極値をとり得る点である》

(解)

条件は図の実線の部分で，曲線の両端点 $(1,0)$, $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を含むから，最大値，最小値をとる得る.

端点の値は，$f(1,0)=1\cdot 0=0, \qquad f\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$



次にラグランジュの乗法定理により，

$f_x=\lambda g_x\ ,\quad f_y=\lambda g_y \quad (\lambda$は定数$)$

ここで，$f_x=y,\quad f_y=x,\quad g_x=2x,\quad g_y=4y$ であるから

$y=\lambda\cdot 2x\ ,\quad x=\lambda\cdot 4y$

$$\begin{cases} y=2\lambda x \\ x=4\lambda y \end{cases}$$

これから $x=8\lambda^2 x$

$\therefore\ (8\lambda^2-1)x=0$

$x=0$ のとき，$y=0$ となり，$x^2+2y^2-1=0$ を満たさない.

よって，$8\lambda^2-1=0 \quad \therefore \lambda=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$

$$\begin{cases} y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x \\ x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$$

これを解いて，$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\pm\dfrac{1}{2}$

条件 $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ より，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

したがって，

最小値は，$f(1,0)=f\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ 〃

最大値は，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 〃

(別解)

$x = \cos\theta, \quad y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$　とおくと,

$x^2 + 2y^2 = \cos^2\theta + 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

よって, $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ を満たす.

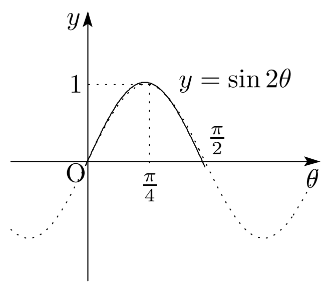
また, $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ より　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

$f(x, y) = xy = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\cos\theta$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta$

$\therefore\ f\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2\theta$

$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$ より,　$0 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$



$\theta = 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき,

最小値 $f(1, 0) = f\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$　〃

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき,

最大値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　〃