漸化式　タイプ　4　$a_{n+1} = p\,a_n + f(n)$　$\left(\begin{array}{l} p \text{ は定数} \\ f(n) \text{ は } n \text{ の指数関数} \end{array}\right)$　1/2

漸化式　タイプ４　は、両辺に適当な指数関数を掛けるか、または、割ってみること。

4.1　数列 $\{a_n\}$ が条件

$$a_1 = 1\,,\ \ a_{n+1} = 3\,a_n + 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとき、一般項 a_n を求めよ。

[解]　$a_{n+1} = 3\,a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと　$b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{3}$

$$\begin{cases} b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{3} \\ b_1 = \dfrac{a_1}{3^1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

よって、数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列である。

$$b_n = \frac{1}{3} + (n-1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n$$

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3}n \qquad \therefore a_n = n \cdot 3^{n-1} \quad \cdots \quad (\text{答})$$

4.2　数列 $\{a_n\}$ が条件

$$a_1 = 1\,,\ \ 2\,a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとき、一般項 a_n を求めよ。

[解]　$2\,a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{4^n}$　より　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2^{2n+1}}$

両辺に $2^{2(n+1)}$ を掛けると

$2^{2(n+1)} \cdot a_{n+1} = 2^{2(n+1)-1} \cdot a_n + 2$　　$4^{n+1}a_{n+1} = 2 \cdot 4^n a_n + 2$

$4^n a_n = b_n$ とおくと,　　$\therefore b_{n+1} = 2\,b_n + 2 \ \cdots$ ①

①を変形して　$\Longleftrightarrow$

$\therefore b_{n+1} + 2 = 2(\ a_n + 2\ )$

$b_1 + 2 = 4^1 a_1 + 2 = 4 \times 1 + 2 = 6$

よって、数列 $\{b_n + 2\}$ は初項 6

公比 2 の等比数列である。

> $\alpha = 2\,\alpha + 2 \ \cdots$ ②
>
> とおくと、$\therefore \alpha = -2$
>
> ① − ②
>
> $b_{n+1} - \alpha = 2(\ a_n - \alpha\ )$

$$b_n + 2 = 6 \cdot 2^{n-1} \qquad \therefore b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$$

$$4^n \cdot a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \qquad \therefore a_n = \frac{3}{2^n} - \frac{2}{4^n} \ \cdots (\text{答})$$

漸化式　タイプ　4　$a_{n+1} = p\,a_n + f(n)$　$\left(\begin{array}{l} p \text{ は定数} \\ f(n) \text{ は } n \text{ の指数関数} \end{array}\right)$　2/2

漸化式　タイプ４　は、両辺に適当な指数関数を掛けるか、または、割ってみること。

4.3　$a_1 = 1$,　$a_{n+1} = 2\,a_n + 2^n$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$　で定められる数列がある。

i)　一般項 a_n を求めよ。

ii)　初項から第 n 項までの和 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ。

[解]　i)　$a_{n+1} = 2\,a_n + 2^n$　　この両辺を 2^{n+1} で割ると、

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$　　ここで　$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと、　$b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{2} \\ b_1 = \dfrac{a_1}{2^1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列である。

$\therefore b_n = \dfrac{1}{2} + (n-1) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}n$　　　$\therefore \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{n}{2}$

$\therefore a_n = n \cdot 2^{n-1}$　$\cdots$　(答)

ii)　$s_n = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$　$\cdots\cdots\cdots$　①

$2s_n = \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$ $\cdots$ ②

①-②

$$-s_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = \frac{1(2^n - 1)}{2-1} - n \cdot 2^n = -(n-1)2^n - 1$$

$\therefore s_n = (n-1) \cdot 2^n + 1$ $\cdots$ (答)

4.4　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を s_n とするとき、

$3 \cdot s_n = a_{n+1} - 2^{n+1}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つという。

$a_{100} = -2^{99}$ となるような a_1 を定めよ。

[解]　$3 \cdot s_n = a_{n+1} - 2^{n+1}$　$(n \geqq 1)$ $\cdots$ ①

$3 \cdot s_{n-1} = a_n - 2^n$　$(n \geqq 2)$ $\cdots$ ②

$n \geqq 2$ のとき　①-②　　$3(s_n - s_{n-1}) = a_{n+1} - a_n - 2^n$

ここで、$s_n - s_{n-1} = a_n$ であるから、　$3a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$

$a_{n+1} = 4a_n + 2^n$　　この両辺を 2^{n+1} で割ると、

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$　　$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと。　$b_{n+1} = 2\,b_n + \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} b_{n+1} + \dfrac{1}{2} = 2(\,b_n + \dfrac{1}{2}\,) \quad (n \geqq 2) \\ b_2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_2}{2^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_2 + 2}{4} \end{cases}$$

よって、数列 $\{b_n + \frac{1}{2}\}$ は初項 $\frac{a_2+2}{4}$ 公比 2 の等比数列である。

$b_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_2 + 2}{4} \cdot 2^{(n-1)-1}$　　$\therefore b_n = (a_2 + 2) \cdot 2^{n-4} - \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{a_n}{2^n} = (a_2 + 2) \cdot 2^{n-4} - \dfrac{1}{2}$　　$\therefore a_n = (a_2 + 2) \cdot 2^{2n-4} - 2^{n-1}$

条件より $a_{100} = (a_2 + 2) \cdot 2^{196} - 2^{99} = -2^{99}$　$\therefore (a_2 + 2) \cdot 2^{196} = 0$　$\therefore a_2 = -2$

① より、$3\,s_1 = a_2 - 2^2$　　$\therefore 3\,a_1 = -2 - 4 = -6$　　$\therefore a_1 = -2$ $\cdots$ (答)