漸化式タイプ１０′　$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n + r \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n + s \end{cases}$　$(p, q, r, s$ は定数$, f(n)$ は n の整関数$)$

２式は a_n , b_n の係数が対称形であるから、２式の和、差を考えてみるとよい。

10.2　２つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の関係

$$a_1 = 2\ ,\ b_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 7\ ,\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を n の式で表せ。

[解] (1)　$a_1 = 2\ ,\ b_1 = 1$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 7 \cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \qquad \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①+②

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 8a_n + 8b_n + 7$$
$$a_{n+1} + b_{n+1} + 1 = 8(a_n + b_n + 1)$$

$a_n + b_n + 1 = c_n$ とおくと

$$\begin{cases} c_{n+1} = 8c_n \\ c_1 = a_1 + b_1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4 \end{cases}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 4、公比 8 の等比数列であるから

$$c_n = 4 \cdot 8^{n-1} \qquad \therefore a_n + b_n + 1 = 4 \cdot 8^{n-1}$$

$$\therefore a_n + b_n = 4 \cdot 8^{n-1} - 1 \cdots\cdots\cdots ③$$

①−②

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n - 2b_n + 7$$
$$a_{n+1} - b_{n+1} + 7 = 2(a_n - b_n + 7)$$

$a_n - b_n + 7 = d_n$ とおくと

$$\begin{cases} d_{n+1} = 2d_n \\ d_1 = a_1 - b_1 + 7 = 2 - 1 + 7 = 8 \end{cases}$$

よって、数列 $\{d_n\}$ は初項 8、公比 2 の等比数列であるから

$$d_n = 8 \cdot 2^{n-1} \qquad \therefore a_n - b_n + 7 = 8 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n - b_n = 8 \cdot 2^{n-1} - 7 \cdots\cdots\cdots ④$$

③+④

$$2a_n = 4 \cdot 8^{n-1} + 8 \cdot 2^{n-1} - 8 \qquad \therefore a_n = 2 \cdot (2^3)^{n-1} + 2^2 \cdot 2^{n-1} - 4$$

$$\therefore a_n = 2^{3n-2} + 2^{n+1} - 4 \cdots\cdots (答)$$

③−④

$$2b_n = 4 \cdot 8^{n-1} - 8 \cdot 2^{n-1} + 6 \qquad \therefore b_n = 2 \cdot (2^3)^{n-1} - 2^2 \cdot 2^{n-1} + 3$$

$$\therefore b_n = 2^{3n-2} - 2^{n+1} + 3 \cdots\cdots (答)$$