漸化式 タイプ １０ $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ $(p, q$ は定数$, f(n)$ は n の整関数$)$

２式の和、差などを考えてみること。見掛けが行列でも同様に考えるとよい。

10.1　k を実数とする。

$$a_1 = 1\ ,\ b_1 = 2\ ,\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を k , n で表せ。

[解] (1)　$a_1 = 1\ ,\ b_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n > 0)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = ka_n + b_n \ \cdots\cdots\cdots \quad ① \\ b_{n+1} = a_n + kb_n \ \cdots\cdots\cdots \quad ② \end{cases}$$

①+②

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = (k+1)(a_n + b_n) \\ a_1 + b_1 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

よって、数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 3、公比 $(k+1)$ の等比数列である。

$$\therefore a_n + b_n = 3(k+1)^{n-1} \ \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

①−②

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = (k-1)(a_n - b_n) \\ a_1 - b_1 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

よって、数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 -1 、公比 $(k-1)$ の等比数列である。

$$\therefore a_n - b_n = (-1)(k-1)^{n-1} \ \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

③+④

$$2a_n = 3(k+1)^{n-1} - (k-1)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}\left\{3(k+1)^{n-1} - (k-1)^{n-1}\right\} \ \cdots\cdots \text{（答）}$$

③−④

$$2b_n = 3(k+1)^{n-1} + (k-1)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{2}\left\{3(k+1)^{n-1} + (k-1)^{n-1}\right\} \ \cdots\cdots \text{（答）}$$