漸化式 タイプ １２ はさみ打ちの原理と極限

漸化式から一般項が類推できず、極限値を求めたいときに考えてみよう。

12.1　$a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{a_n}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ のとき、

数列 $\{a_n\}$ は極限値 $\sqrt{2}$ をもつことを示せ。

[解] (1)　$a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{a_n}{2}$ $\cdots\cdots$ ①

① の両辺から $\sqrt{2}$ を引くと

$$a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{a_n}+\frac{a_n}{2}-\sqrt{2} \qquad \therefore a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}$$

$$\therefore a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a_n}\right)\ \cdots\cdots\ ②$$

①から、次のことが推測できる。

$a_n>\sqrt{2}$ $\cdots\cdots$ ③

これを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき、 $a_1=2>\sqrt{2}$

よって、$n=1$ のとき、③ は成り立つ。

[2]　$n=k$(k は自然数) のとき、③が成り立つと仮定すると、$a_k>\sqrt{2}$

これから、$0<\dfrac{\sqrt{2}}{a_k}<1$ 　　$\therefore 1-\dfrac{\sqrt{2}}{a_k}>0$

よって、これと② から、$a_{k+1}>\sqrt{2}$ が成り立つ。

[3]　したがって、数学的帰納法によって、すべての自然数 n について③は成り立つ。

$\therefore a_n>\sqrt{2}$ 　$(n=1,2,3,\cdots)$

これから、$0<\dfrac{\sqrt{2}}{a_n}<1$ 　　$\therefore 0<1-\dfrac{\sqrt{2}}{a_n}<1$ 　　$\therefore \left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a_n}\right|<1$ $\cdots\cdots$ ④

② から　$\left|a_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|a_n-\sqrt{2}\right|\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{a_n}\right|$

これと ④ から　$\therefore \left|a_{n+1}-\sqrt{2}\right|<\dfrac{1}{2}\left|a_n-\sqrt{2}\right|$

これに $n=1,2,3,\cdots,n-1$ を代入して

$\left|a_2-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\left|a_1-\sqrt{2}\right|$

$\left|a_3-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\left|a_2-\sqrt{2}\right|$

$\left|a_4-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\left|a_3-\sqrt{2}\right|$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\left|a_n-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\left|a_{n-1}-\sqrt{2}\right|$

辺々掛けて整理すると

$$\therefore \left|a_n-\sqrt{2}\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|a_1-\sqrt{2}\right|$$

これに、$a_1=2$ を代入すると

$$\left|a_n-\sqrt{2}\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|2-\sqrt{2}\right|$$

$$\therefore 0<\left|a_n-\sqrt{2}\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{2})=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n-\sqrt{2}\right|=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$$