漸化式　タイプ　２　　$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$

漸化式を変形または置換して、タイプ２　の形にし、$n = 1, 2, 3, \cdots$ を代入して辺々掛ける。

2.1　$a_1 = 8$,　$a_{k+1} = \dfrac{a_k}{2^k}$　($k = 1, 2, 3, \cdots$)

によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

[解]　$a_1 = 8$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2^k} \cdot a_k \quad \cdots \quad ①$$

① に $k = 1, 2, 3, \cdots, (n-1)$ を代入すると、

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{2^2} \cdot a_2$$

$$a_4 = \frac{1}{2^3} \cdot a_3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot a_{n-1}$$

辺々掛けて、両辺を $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{n-1}$ で割ると

$$a_n = a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \ \cdots\cdots \ \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}}$$

$$= 2^3 \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$$

$$= 2^3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$= 2^{3-\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$= 2^{-\frac{n^2-n-6}{2}}$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n} = 2^{-\frac{(n-3)(n+2)}{2}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答})$$

漸化式　タイプ　２　$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$　2/3

漸化式を変形または置換して、タイプ２　の形にし、$n = 1, 2, 3, \cdots$ を代入して辺々掛ける。

2.2　数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_1 = 1$, $n\,a_n = (n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(\ k = 1, 2, 3, \cdots)$

を満たしている、一般項 a_n $(\ n = 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

[解]　$a_1 = 1$

$$n\,a_n = (n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k \quad (\ n \geqq 2\ ) \quad \cdots \quad ①$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad \cdots \quad ②$$

とおくと、$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\cdots$ ②′

$n \geqq 2$ のとき

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \quad \cdots \quad ③$$

② − ③　$s_n - s_{n-1} = a_n$ $\cdots$ ④

② ′,④ を ① に代入して　$n(\ s_n - s_{n-1}\ ) = (n-1)s_n$

$\therefore s_n = n\,s_{n-1}$

この式の n に $1, 2, 3, \cdots, n$ を代入すると、

$s_2 = 2 \cdot s_1$

$s_3 = 3 \cdot s_2$

$s_4 = 4 \cdot s_3$

$\cdots\cdots\cdots$

$s_{n-1} = (n-1) \cdot s_{n-2}$

$s_n = n \cdot s_{n-1}$

辺々掛けて、両辺を $s_2, s_3, s_4, \cdots, s_{n-1}$ で割ると

$$s_n = n \cdot (n-1) \cdot \ \cdots\ \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot s_1$$

ここで、 $s_1 = a_1 = 1$ であるから　$s_n = n \cdot (n-1) \cdot \ \cdots\ \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\therefore s_n = n!$ $(\ n \geqq 1\ )$

$n \geqq 2$ のとき、④ より

$$a_n = s_n - s_{n-1} = n! - (n-1)! = n \cdot (n-1)! - (n-1)!$$

$\therefore \boldsymbol{a_n} = (n-1) \cdot (n-1)!$　$(\ n \geqq 2\ )$　$\cdots\cdots$　(答)

漸化式　タイプ　2　　$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$　　3/3

漸化式を変形または置換して、タイプ２　の形にし、$n=1,2,3,\cdots$ を代入して辺々掛ける。

2.3　$a_1=1$, $a_2=2$ である数列 $\{a_n\}$ があり、$\{a_n\}$ の項を係数とする２次方程式

$a_{n+2}\,x^2-4a_{n+1}\,x+a_n=0\cdots$① 　はすべての自然数 n について重解をもつ。

(1)　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を n で表せ。

(2)　a_n および方程式 ① の重解 t_n を n で表せ。

[解]　(1)　$a_{n+2}\,x^2-4a_{n+1}\,x+a_n=0\cdots$①

① は２次方程式であるから、$a_{n+2}\neq 0$

また、① は重解をもつから、

$$\frac{D}{4}=(-2\,a_{n+1})^2-a_{n+2}\cdot a_n=0 \qquad \therefore 4\,{a_{n+1}}^2=a_n\cdot a_{n+2}$$

ここで、$a_{n+2}\neq 0$ より　$a_{n+1}\neq 0$, $a_n\neq 0$ であるから

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=4\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

よって、$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$ 　とおくと、　$b_{n+1}=4\,b_n$, $b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2}{1}=2$

ゆえに、数列 $\{b_n\}$ は初項 2 , 公比 4 の等比数列である。

$$\therefore b_n=2\cdot 4^{n-1}=2\cdot 2^{2(n-1)}=2^{2n-1}$$

$$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^{2n-1}\quad\cdots\quad(答)$$

(2)　(1) の結果を用いると、

$$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}$$

$$=2^{2(n-1)-1}\cdot 2^{2(n-2)-1}\cdot\ \cdots\ \cdot 2^{2\cdot 3-1}\cdot 2^{2\cdot 2-1}\cdot 2^{2\cdot 1-1}$$

$$\therefore a_n=2^{(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+3+1}$$

ここで、この指数について計算すると

$$1+3+5+\cdots+(2n-5)+(2n-3)=\sum_{k=1}^{n-1}(\,2k-1\,)=2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=2\times\tfrac{1}{2}n(n-1)-1\times(n-1)=(n-1)^2$$ 　であるから

$$\therefore a_n=2^{(n-1)^2}\quad\cdots\quad(答)$$

このとき、解の公式から　① の重解は

$$t_n=-\frac{-4\,a_{n+1}}{2\cdot a_{n+2}}=\frac{2\cdot 2^{\{(n+1)-1\}^2}}{2^{\{(n+2)-1\}^2}}=2^{(1+n^2)-(n+1)^2}=2^{-2n}=\frac{1}{4^n}\quad\cdots\quad(答)$$