漸化式 タイプ 3　$a_{n+1} = p\,a_n + q$　（ p, q は定数 ）

1/3

漸化式　タイプ３　は階差数列でも解けるが、変形して等比数列で解く方が簡単である。

3.1　$a_1 = 6$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 2$　（ $n = 1, 2, 3, \cdots$ ）によって定められる数列 $\{a_n\}$

において、　$|\, a_n - 3\,| < \dfrac{1}{100}$ となるのは、 $n \geqq \boxed{}$ のときである。

ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

[解]　$a_1 = 6$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2 \quad \cdots \quad ①$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + 2 \quad \cdots \quad ②$$

とおくと、 $\dfrac{2}{3}\alpha = 2$　$\therefore \alpha = 3$

① − ②

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{3}(\, a_n - \alpha\,)$$

$\Longleftarrow$ 式変形の考え方です、省略して、単に ①を変形して で、良いです。

$$\therefore a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(\, a_n - 3\,)$$

$a_n - 3 = b_n$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n \\ b_1 = a_1 - 3 = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

ゆえに、数列 $\{b_n\}$ は初項 3 , 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 \cdot (3^{-1})^{n-1} = 3^{1-(n-1)} = 3^{2-n} \qquad \therefore a_n - 3 = 3^{2-n}$$

よって、一般項は $a_n = 3^{2-n} + 3$ である。

ここで、$|a_n - 3| < \dfrac{1}{100}$ より　　$|3^{2-n}| < \dfrac{1}{10^2}$　　$\therefore 3^{2-n} < 10^{-2}$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^{2-n} < \log_{10} 10^{-2} \qquad \therefore (2-n)\log_{10} 3 < -2\log_{10} 10$$

$$(2-n) \times 0.4771 < -2 \times 1 \qquad \therefore (n-2) > \tfrac{2}{0.4771}$$

$$\therefore n > 6.19\cdots$$

これを満たす自然数 n を求めて

$$n \geqq \boxed{7} \quad \cdots \quad (\text{答})$$

漸化式 タイプ 3 $a_{n+1} = p\,a_n + q$ （ p, q は定数 ）　2/3

漸化式　タイプ３　は階差数列でも解けるが、変形して等比数列で解く方が簡単である。

3.2　１の目が出ているサイコロがある。このサイコロを等確率でいずれか横の面に倒す。

この操作を繰り返して、 n 回目に１か６の目が出る確率を求めよ。

ただし、１と６は反対側の面にあるものとする。

[解]　求める確率を p_n とおく。

n 回目に１か６の目が出るとき、 $(n+1)$ 回目には１の目も６の目もでない。

また、 n 回目に１の目も６の目も出ないとき、４通りの倒し方のうち $(n+1)$ 回目に

１か６の目が出る倒し方は２通りある。

したがって、

$$p_{n+1} = p_n \times 0 + (1 - p_n) \times \tfrac{2}{4}$$

$$p_{n+1} = -\frac{1}{2}\,p_n + \frac{1}{2} \quad \cdots \quad ①$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2} \quad \cdots \quad ②$$

とおくと、 $\dfrac{3}{2}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ 　$\therefore \alpha = \dfrac{1}{3}$

① − ②

$$p_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{2}(\,p_n - \alpha\,)$$

⟸ 式変形の考え方です、省略して、単に①を変形してで、良いです。

$$\therefore p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(\,a_n - \frac{1}{3}\,) \cdots ③$$

最初に１の目が出ているから、 $p_0 = 1$ としてよい。

$$p_0 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdots ④$$

よって、③ , ④ から、数列 $\{p_n - \frac{1}{3}\}$ は初項 $\frac{2}{3}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1}$$ ⟸ 第 n 項は第 0 項から数えて $(n+1)$ 番目である。

$$\therefore p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{3}\left\{1 + 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\right\} \cdots (答)$$

漸化式 タイプ 3　$a_{n+1} = p\,a_n + q$ 　(p, q は定数)　3/3

漸化式　タイプ３　は階差数列でも解けるが、変形して等比数列で解く方が簡単である。

3.3　正の実数 h に対して、数列 $\{a_n\}$ が条件

$$a_1 = 2\ ,\ \ \frac{a_{n+1} - a_n}{h} = a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとき、一般項 a_n を求めよ。なお、解き方を２通り示せ。

[解 1]　$\dfrac{a_{n+1} - a_n}{h} = a_n - 1$　より　$a_{n+1} - a_n = ha_n - h$

$\therefore a_{n+1} = (1+h)a_n - h \cdots$ ①

①を変形して　$\Longleftrightarrow$

$\therefore a_{n+1} - 1 = (1+h)(\ a_n - 1\ )$

$a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

よって、数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 1

公比 $(1+h)$ の等比数列である。

$\alpha = (1+h)\alpha - h \cdots$ ②

とおくと、$-h\alpha = -h$　$\therefore \alpha = 1$

① − ②

$a_{n+1} - \alpha = (1+h)(\ a_n - \alpha\ )$

$\therefore a_n - 1 = 1 \cdot (1+h)^{n-1}$　　$\therefore p_n = (1+h)^{n-1} + 1 \cdots$ (答)

[解 2]　$a_{n+1} = (1+h)a_n - h \cdots$ ①

$a_{n+2} = (1+h)a_{n+1} - h \cdots$ ②

② − ①

$a_{n+2} - a_{n+1} = (1+h)\{a_{n+1} - a_n\}$

$a_{n+1} - a_n = b_n \cdots$ ③　とおくと、

$$\begin{cases} b_{n+1} = (1+h)b_n \\ b_1 = a_2 - a_1 = \{(1+h)a_1\} - a_1 = (1+h) \times 2 - 2 = 2h - 1 \end{cases}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $(2h-1)$,　公比 $(1+h)$ の等比数列である。

$\therefore b_n = (2h-1) \cdot (1+h)^{n-1}$

③ から、数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2h-1)\cdot(1+h)^{k-1} = 2 + (2h-1)\sum_{k=1}^{n-1}(1+h)^{k-1}$$

$$= 2 + (2h-1)\{1 + (1+h) + (1+h)^2 + \cdots + (1+h)^{n-2}\}$$

$$= 2 + (2h-1)\cdot\frac{1\cdot\{(1+h)^{n-1} - 1\}}{(1+h) - 1} = (1+h)^{n-1} + 1$$

これは $n = 1$ のとこも成り立つ。

$\therefore a_n = (1+h)^{n-1} + 1 \quad \cdots \quad$ (答)