漸化式　タイプ　5　$a_{n+1} = p\,a_n + f(n)$　$\left(\begin{array}{l} p \text{ は定数} \\ f(n) \text{ は } n \text{ の整関数} \end{array}\right)$　　1/2

漸化式　タイプ５　は、$f(n)$ が n の k 次式ならば、$f(n) = An^k + \cdots + Cn + D$ などとおく。

5.1　$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + 2n - 3$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$　で定められる数列がある。

i)　一般項 a_n を求めよ。

ii)　初項から第 n 項までの和 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ。

[解]　i)　$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + 2n - 3$　$\cdots$　①

$f(n) = An + B$　とおくと、　$f(n+1) = A(n+1) + B$　となるから

① が次のように変形されたとすると、

$$a_{n+1} + f(n+1) = \frac{3}{2}\{a_n + f(n)\} \quad \cdots \quad ②$$

$$\therefore a_{n+1} + A(n+1) + B = \frac{3}{2}(a_n + An + B)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}An + (-A + \frac{1}{2}B)$$

これと ① を比べて、$\begin{cases} \dfrac{1}{2}A = 2 \\ -A + \dfrac{1}{2}B = -3 \end{cases}$　　これを解いて、$A = 4$　,　$B = 2$

$$\therefore f(n) = 4n + 2 \quad , \quad f(n+1) = 4(n+1) + 2$$

これを ② に代入して、

$$a_{n+1} + 4(n+1) + 2 = \frac{3}{2}(a_n + 4n + 2)$$

$a_n + 4n + 2 = b_n$ とおくと、

$\begin{cases} b_{n+1} = \dfrac{3}{2}b_n \\ b_1 = a_1 + 4 \times 1 + 2 = 7 \end{cases}$　　よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 7 , 公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列である。

$$b_n = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n + 4n + 2 = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4n - 2 \ \cdots \text{(答)}$$

ii)　$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{7\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 4k - 2\right\} = 7\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= 7\left\{1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\} - 4 \times \frac{1}{2}n(n+1) - 2 \times n$$

$$= \frac{7\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1} - 2n(n+1) - 2n = 14\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2(n^2 + 2n + 7) \ \cdots \text{(答)}$$

漸化式 タイプ 5 $a_{n+1} = p\,a_n + f(n)$ $\left(\begin{array}{l} p \text{ は定数} \\ f(n) \text{ は } n \text{ の整関数} \end{array}\right)$ 2/2

漸化式 タイプ５ は、$f(n)$ が n の k 次式ならば、$f(n) = An^k + \cdots + Cn + D$ などとおく。

5.2 数列 $\{a_n\}$ が関係式 $a_{n+1} - 2a_n = -n^2 + 2n + 1 \quad (n \geqq 1)$ を満たしている。

n の２次式 $f(n)$ に対して、$b_n = a_n + f(n)$ とおくと、

数列 $\{b_n\}$ が公比２の等比数列になる、このとき $f(n) = \boxed{}$ であり、

これより、$a_1 = 3$ のとき、a_n を求めると、$a_n = \boxed{}$ である。

[解] $a_{n+1} - 2a_n = -n^2 + 2n + 1 \quad \cdots$ ①

$f(n) = An^2 + Bn + C \quad (A \neq 0)$ とおくと、

$f(n+1) = A(n+1)^2 + B(n+1) + C$ となるから

① を変形して、次のようになったとすると、

$a_{n+1} + f(n+1) = 2\{a_n + f(n)\} \quad \cdots$ ②

$a_n + f(n) = b_n$ とおくと、 $b_{n+1} = 2b_n$

よって、数列 $\{b_n\}$ は確かに公比２の等比数列になっている。

このとき、② より

$a_{n+1} + A(n+1)^2 + B(n+1) + C = 2(a_n + An^2 + Bn + C)$

$\therefore a_{n+1} - 2a_n = An^2 + (-2A + B)n + (-A - B + C)$

これと ① と比べて、

$$\begin{cases} A = -1 \\ -2A + B = 2 \\ -A - B + C = 1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

$\therefore f(n) = -n^2 \quad \cdots$ (答)

このとき、$f(n+1) = -(n+1)^2$ であるから、これらを ② に代入して、

$a_{n+1} - (n+1)^2 = 2(a_n - n^2)$

ここで、 $a_n - n^2 = b_n$ とおけば $b_{n+1} = 2b_n$

また、 $a_1 = 3$ のとき $b_1 = a_1 - 1^2 = 3 - 1 = 2$

ゆえに、数列 $\{b_n\}$ は初項２、公比の２の等比数列である。

$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \qquad \therefore a_n - n^2 = 2^n$

$\therefore a_n = 2^n + n^2 \quad \cdots$ (答)