漸化式　タイプ　7　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{pa_n+q}$　（$p,\ q$ は定数）　1/2

漸化式　タイプ７　の両辺が 0 でないことを確認し、両辺の逆数をとってみること。

7.1　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{1}{2}$ ，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$　$(n=1,2,3,\cdots)$ 満たすとする。

(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とし、b_{n+1} を b_n で表せ。

(2)　b_n を n の式で表せ。　　(3)　a_n を n の式で表せ。

[解]　(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$ ，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$

この漸化式の両辺は 0 ではないから、両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{2a_n} \qquad \therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$　とおくと、　　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}\ \cdots$ (答)

(2)　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}\ \cdots$ ①

$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}\ \cdots$ ②

とおくと、　$\alpha=1$

① − ②

$b_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{2}(b_n-\alpha)$

$\Longleftrightarrow$　① を変形して、

$$\therefore b_{n+1}-1=\frac{1}{2}(b_n-1)$$

$b_n-1=c_n$ とおくと、　$\begin{cases} c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n \\ c_1=b_1-1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}-1=1 \end{cases}$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項１、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$$\therefore c_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore b_n-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1\ \cdots\ (答)$$

(3)　(2) の結果と $b_n=\dfrac{1}{a_n}$　より、

$$\therefore\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1 \qquad \therefore a_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\therefore a_n=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}\ \cdots\ (答)$$

漸化式 タイプ 7 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$ （$p,\ q$ は定数） 2/2

漸化式 タイプ７ の両辺が 0 でないことを確認し、両辺の逆数をとってみること。

7.2 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n\,a_{n-1}+1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ によって定める。

(1) $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき、 b_n を n と b_{n-1} を用いて表せ。

(3) 一般項 a_n を n の式で表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[解] $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n\,a_{n-1}+1}$ $\cdots$ ①

(1) $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ $\cdots$ Ⓐ

これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$ のとき　$a_1 = 1 > 0$　よって、 $n = 1$ のとき Ⓐ は成り立つ。

(ii) $n = k\,(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき、Ⓐが成り立つと仮定すると、

$a_k > 0$　このとき ①から　$a_{k+1} = \dfrac{a_k}{k\,a_k+1} > 0$

よって、$n = k+1$ のときも、Ⓐは成り立つ。

したがって、(i),(ii) から、すべての自然数 n についてⒶは成り立つ。

(2) ①の両辺は共に正であるから、①の両辺の逆数をとると、

$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n\,a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$　$\therefore \dfrac{1}{a_n} = n + \dfrac{1}{a_{n-1}}$　よって、$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと、

$\therefore b_n = b_{n-1} + n$ $\cdots$ (答)

(3) (2) の結果から、 $b_{n+1} = b_n + (n+1)$　$\therefore b_{n+1} - b_n = n+1$

よって、数列 $\{b_n\}$ の階差数列が数列 $\{n+1\}$ であるから、

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1}k + \sum_{k=1}^{n-1}1 = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + 1\cdot(n-1)$$

$\therefore b_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$　これは、$n = 1$ のときも成り立つ。

$\therefore \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$　$\therefore a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ $\cdots$ (答)

(4)
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big)$$

$$= 2\Big\{\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\Big\}$$

$= 2\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big)$　$\therefore S_n = \dfrac{2n}{n+1}$ $\cdots$ (答)