漸化式 タイプ 8 $a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ $(p,q,r,s$ は定数 $)$

1/2

特定方程式の解を求め、 a_{n+1} と解との差をとってみること。差が 0 でないことを利用しよう。

8.1 $a_1=4$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) すべての自然数 n に対して、 $a_n\neq 3$ を示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解] $a_1=4$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $\cdots\cdots$①

(1) $a_n\neq 3\cdots\cdots$②

これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき $a_1=4\neq 3$

よって、$n=1$ のとき ②は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき ②が成り立つと仮定すると、 $a_k\neq 3$

$n=k+1$ のときを考えると、①から

$$a_{k+1}-3=\frac{4a_k-9}{a_k-2}-3=\frac{4a_k-9-3(a_k-2)}{a_k-2}=\frac{a_k-3}{a_k-2}\neq 0 \qquad \therefore a_{k+1}\neq 3$$

[3] したがって [1],[2] から数学的帰納法によって, すべての自然数 n について②は成り立つ。

(2)

特定方程式

$x=\dfrac{4x-9}{x-2}$ $\quad\therefore x(x-2)=4x-9$

$(x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=3$ (重解)

$$a_{n+1}-3=\frac{4a_n-9}{a_n-2}-3=\frac{4a_n-9-3(a_n-2)}{a_n-2} \qquad \therefore a_{n+1}-3=\frac{a_n-3}{a_n-2}$$

$a_n\neq 3$, $a_{n+1}\neq 3$ より、両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{a_n-2}{a_n-3} \qquad \therefore \frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{1}{a_n-3}+1$$

$\dfrac{1}{a_n-3}=b_n$ とおくと $\quad b_{n+1}=b_n+1$

$$\therefore \begin{cases} b_{n+1}-b_n=1 \\ b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=\dfrac{1}{4-3}=1 \end{cases}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項１、公差１の等差数列である。

$\therefore b_n=1+(n-1)\times 1=n\cdots\cdots$(答)

$\therefore \dfrac{1}{a_n-3}=n$ $\qquad \therefore a_n=\dfrac{1}{n}+3\cdots\cdots$(答)

漸化式　タイプ　8　$a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$　$(p,q,r,s$ は定数 $)$　　2/2

8.2　$a_1=5$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$　$(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　すべての自然数 n に対して、 $a_n\neq\pm1$ を示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ とおくとき、b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

[解]　$a_1=5$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\cdots\cdots$①

特定方程式

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore 2x^2=x^2+1 \qquad \therefore x=\pm1$$

(1)　$a_n\neq\pm1\cdots\cdots$②

これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$　のとき　　$a_1=5\neq\pm1$

よって、$n=1$　のとき　②は成り立つ。

[2] $n=k$　(k は自然数)　のとき　②が成り立つと仮定すると、　$a_k\neq\pm1$

$n=k+1$　のときを考えると、①から

$$a_{k+1}\pm1=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)\pm1=\frac{(a_k\pm1)^2}{2a_k}\neq0 \qquad \therefore a_{k+1}\neq\pm1$$

よって、$n=k+1$ のときも　$a_{k+1}\neq\pm1$ が成り立つ。

[3] したがって [1],[2] から、すべての自然数 n について②は成り立つ。

(2)

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-1=\frac{{a_n}^2-2a_n+1}{2a_n}=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}$$

$$a_{n+1}-(-1)=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)+1=\frac{{a_n}^2+2a_n+1}{2a_n}=\frac{(a_n+1)^2}{2a_n}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\frac{\dfrac{(a_n-1)^2}{2a_n}}{\dfrac{(a_n+1)^2}{2a_n}}=\left(\frac{a_n-1}{a_n+1}\right)^2$$

よって、$\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=b_n\cdots\cdots$③　とおくと　　$b_{n+1}={b_n}^2\cdots\cdots$(答)$\cdots\cdots$④

(3)　$a_1=5$ より　$b_1=\dfrac{5-1}{5+1}=\dfrac{2}{3}>0$

したがって、これと④からすべての自然数 n について $b_n>0$ である。

よって、④の両辺の常用対数 (底が 10 の対数) をとると　$\log_{10}b_{n+1}=2\log_{10}b_n$

ゆえに、$\log_{10}b_n=c_n$ とおくと　$\begin{cases} c_{n+1}=2c_n \\ c_1=\log_{10}b_1=\log_{10}\dfrac{2}{3}\end{cases}$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 $\log_{10}\frac{2}{3}$、公比 2 の等比数列である。

$$\therefore c_n=\left(\log_{10}\frac{2}{3}\right)\cdot2^{n-1}=2^{n-1}\log_{10}\frac{2}{3}=\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}$$

$$\therefore \log_{10}b_n=\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}} \qquad \therefore b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}\cdots\cdots⑤$$

③より　$a_n-1=b_n(a_n+1)$　　$\therefore a_n(1-b_n)=1+b_n$

ここで、すべての自然数 n について $2^{n-1}>0$ だから、⑤より $b_n\neq1$ である。

$$\therefore a_n=\frac{1+b_n}{1-b_n}=\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}}}=\frac{3^{2^{n-1}}+2^{2^{n-1}}}{3^{2^{n-1}}-2^{2^{n-1}}}\cdots\cdots(答)$$